Lección n°7: Modos de Convergencia

EPN, verano 2009

Conocemos por el momento 3 modos de convergencia:

1. Convergencia simple $\Longrightarrow$ poca estructura, noción de convergencia poco exigente, a menudo verificada.
2. Convergencia uniforme $\Longrightarrow$ necesidad de una estructura métrica, noción de convergencia muy exigente.
3. Convergencia μ-c.t.p. $\Longrightarrow$ lo mismo que la convergencia simple, *casi* lo mismo módulo el "μ-c.t.p.".

Vamos a estudiar otros tipos de convergencia y las relaciones existentes entre estos modos de convergencia pasando por 3 etapas:

- Caso general: ninguna condición sobre la masa total de X
- Caso de masa total finita
- Hipótesis suplementaria de acotación

* * *

1. Caso General

1.1. Convergencia en p-promedio

Definición 1 (Convergencia en p-promedio) *Sea $1 \leq p < +\infty$ un real. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones y si f es una función, ambas pertenecientes al espacio $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, diremos que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia la función f en p-*promedio *si se tiene*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)|^p d\mu(x) = 0. \tag{1}$$

Un ejemplo $\Longrightarrow$ Consideremos el espacio medido $(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}), \lambda)$ y la sucesión de funciones determinadas por $f_n(x) = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ para todo $n \geq 1$, se tiene entonces

$$\int_{\mathbb{R}} |1/n\mathbb{1}_{[0,1]}(x) - 0|^p dx = \frac{1}{n^p} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Teorema 1 *La convergencia en p-promedio no implica ni la convergencia uniforme ni la convergencia μ-c.t.p., recíprocamente estas nociones de convergencia no implican la convergencia en p-promedio.*

Prueba. Para la verificación de estas aserciones es suficiente mostrar ejemplos en donde estas implicaciones fallan.

1) La convergencia en p-promedio no implica la convergencia uniforme:
Sea $X = \mathbb{R}$ y sea $(f_n)_{n\geq 1} = \mathbb{1}_{[1,1+1/n[}(x)$. Esta sucesión converge en p-promedio hacia la función cero pues $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[1,1+1/n[}(x)dx = 1/n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pero no converge uniformemente.

2) La convergencia en p-promedio no implica la convergencia μ-c.t.p.:
Sea $X = [0, 1]$. Notemos que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ existen dos enteros positivos j, k únicamente determinados, tales que $n = 2^k + j$ y $0 \leq j < 2^k$ y para tales enteros definimos $f_n(x) = \mathbb{1}_{[j2^{-k},(j+1)2^{-k}]}(x)$. Tenemos así que $f_1 = \mathbb{1}_{[0,1]}$, $f_2 = \mathbb{1}_{[0,1/2]}$, $f_3 = \mathbb{1}_{[1/2,1]}$. Vemos entonces que $\int_X |f_n(x)|dx = 2^{-k}$ de manera que podemos decir que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ en p-promedio. Sin embargo, no existe un solo punto de X tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ y por lo tanto no se tiene que esta sucesión de funciones converge λ-c.t.p. hacia cero.

3) La convergencia uniforme no implica la convergencia en p-promedio:
Sea $X = \mathbb{R}$ y sea $f_n(x) = n^{-1/p}\mathbb{1}_{[0,n]}$ para $n \geq 1$. Se verifica sin problema que esta sucesión converge uniformemente hacia cero, sin embargo se tiene que $\int_{\mathbb{R}} n^{-1}\mathbb{1}_{[0,n]}(x)dx = 1$ para todo $n \geq 1$.

4) La convergencia μ-c.t.p. no implica la convergencia en p-promedio:
sea $X = [0,1]$ y sea $(f_n)_{n\geq 1} = n^{1/p}\mathbb{1}_{]0,1/n]}(x)$. Entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ λ-c.t.p. pero esta sucesión no converge hacia cero en p-promedio pues $\int_X |f_n(x)|^p dx = 1$ para todo $n \geq 1$.

■

1.2. Convergencia en μ-medida

Definición 2 (Convergencia en μ-medida) *Sean f, f_n, $n = 1, 2, ...$ funciones medibles definidas sobre un espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Diremos que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en* μ-medida *hacia f si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n > N_\varepsilon \Longrightarrow \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \leq \varepsilon. \tag{2}$$

Un ejemplo $\Longrightarrow$ Definimos $f_n(x) = n\mathbb{1}_{[0,1/n[}(x)$ entonces esta sucesión tiende hacia cero en medida.

Proposición 1 *La anterior definición es equivalente a la siguiente reformulación:*

$$(\forall \varepsilon > 0) \qquad \lim_{n\to+\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0. \tag{3}$$

Prueba. Tenemos de forma simple que la fórmula (3) implica (2). Para ver la implicación inversa, fijemos $\varepsilon > 0$ y $0 < \delta < \varepsilon$ y apliquemos (3) al parámetro δ. Existe por lo tanto un entero N_ε tal que, para todo $n > N_\varepsilon$ se tenga

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \delta\}) < \delta.$$

Dado que se tiene la desigualdad

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \leq \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \delta\}),$$

podemos concluir que $\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \delta$ para todo $n > N_\varepsilon$. Es decir, haciendo $n \to +\infty$ obtenemos

$$\limsup_{n\to+\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \delta.$$

Puesto que la expresión anterior es válida para todo $0 < \delta < \varepsilon$, obtenemos (3) haciendo $\delta \to 0$. Lo que nos permite terminar la demostración.

■

Proposición 2 (Desigualdad de Tchebychev) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, sea f una función definida sobre X a valores en $\mathbb{K}$ y sea $1 \leq p < +\infty$ un parámetro real. Si $f \in L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ entonces tenemos para todo $\alpha > 0$ la estimación*

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\})^{1/p} \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^p}. \tag{4}$$

Teorema 2 *Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles, f una función medible y $1 \leq p < +\infty$.*

1) La convergencia en μ-casi todas partes no implica la convergencia en μ-medida.

2) La convergencia en μ-medida no implica la convergencia en μ-casi todas partes.

3) La convergencia uniforme implica la convergencia en μ-medida.

4) La convergencia en μ-medida no implica la convergencia uniforme.

5) La convergencia en p-promedio implica la convergencia en μ-medida.

6) La convergencia en μ-medida no implica la convergencia en p-promedio.

Demostración. En la construcción de los contra ejemplos fijamos $X = \mathbb{R}$ dotado de su estructura de espacio medido natural y utilizaremos algunas de las funciones ya presentadas anteriormente.

1) Sea $f_n(x) = \mathbb{1}_{[n,n+1[}(x)$, entonces vemos que $f_n \longrightarrow 0$ en μ-casi todas partes pero f_n no converge en μ-medida pues $\mu(\{x \in X : |f_n(x)| > \varepsilon\}) = 1$ para todo $\varepsilon > 0$.

2) Utilizamos aquí las funciones definidas por $f_n(x) = \mathbb{1}_{[j2^{-k},(j+1)2^{-k}[}(x)$. Entonces se tiene

$$\mu(\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x)| > \varepsilon\}) = 2^{-k} \longrightarrow 0$$

pero f_n no converge hacia 0 en μ-casi todas partes.

3) La estimación $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ implica la desigualdad $\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \varepsilon$ de donde se deduce el resultado deseado.

4) Consideremos la sucesión de funciones reales $f_n(x) = \mathbb{1}_{[0,1/n[}$. Sabemos que esta sucesión no converge uniformemente mientras que se tiene $\mu(\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x)| > 1/n\}) = 1/n$, cantidad que tiende hacia 0 si $n \longrightarrow +\infty$.

5) Este punto es una aplicación directa de la desigualdad de Tchebychev. En efecto, sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones que convergen en L^p hacia una función $f \in L^p$. Entonces $\|f - f_n\|^p_{L^p} \geq \varepsilon^p \mu(\{|f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\})$ de donde se deduce que la convergencia en L^p implica la convergencia en μ-medida.

6) La sucesión de funciones $f_n(x) = n^{1/p}\mathbb{1}_{[0,1/n[}(x)$ definidas sobre $[0,1]$ convergen hacia 0 en medida pero no convergen en p-promedio lo que muestra que estas nociones de convergencia son diferentes.

■

1.3. Convergencia μ-casi uniforme

Definición 3 (Convergencia μ-casi uniforme) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sean $f, f_n : X \longrightarrow \mathbb{K}$ funciones medibles. Decimos que la sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende hacia la función f* μ-casi uniformemente *si para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $A_\varepsilon \in \mathscr{A}$ tal que $\mu(X \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f$ uniformemente sobre A_ε.*

En la demostración del resultado a continuación presentamos algunos ejemplos de sucesiones de funciones que convergen μ-casi uniformemente.

Teorema 3 *De la misma manera que en el teorema 2 - y bajo las mismas hipótesis, reagrupamos aquí las relaciones entre estos modos de convergencia:*

1) La convergencia uniforme implica la convergencia μ-casi uniforme.

2) La convergencia μ-casi uniforme no implica la convergencia uniforme.

3) La convergencia en μ-casi todas partes no implica la convergencia μ-casi uniforme.

4) La convergencia μ-casi uniforme implica la convergencia en μ-casi todas partes.

5) la convergencia en μ-medida no implica la convergencia μ-casi uniforme.

6) la convergencia μ-casi uniforme implica la convergencia en μ-medida.

7) la convergencia en p-promedio no implica la convergencia μ-casi uniforme.

8) la convergencia μ-casi uniforme no implica la convergencia en p-promedio.

Demostración.

1) Este punto es inmediato por la definición de convergencia μ-casi uniforme de manera que los detalles quedan al cargo del lector.

2) Sea $X = [0, +\infty[$ y sea la sucesión $f_n(x) = \mathbb{1}_{[0,1/n[}(x)$. Fijando $\varepsilon = 1/n$ y $A_\varepsilon =]1/n, +\infty[$ no es difícil ver que esta sucesión converge μ-casi uniformemente hacia 0, pero que no converge uniformemente.

3) Sea $X = [0, +\infty[$. La función $f_n(x) = \mathbb{1}_{[n,n+1[}(x)$ converge hacia cero en μ-casi todas partes, pero si fijamos $\varepsilon = 1/2$ tenemos que para todo conjunto medible A se tiene que $\mu(X \setminus A) \geq 1/2$ o que $\sup\limits_{x\in A}|f_n(x) - f(x)| \geq 1/2$: es decir que no se tiene la convergencia μ-uniforme.

4) Este hecho se deduce sin problema de la definición de convergencia μ-casi uniforme.

5) Sabemos que la sucesión de funciones $f_n(x) = \mathbb{1}_{[j2^{-k},(j+1)2^{-k}[}(x)$ converge en μ-medida hacia cero, pero esta sucesión no converge μ-casi uniformemente hacia cero pues no existe, para todo $\varepsilon > 0$, un conjunto A_ε tal que $\mu(X \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$ y tal que sobre este conjunto se tenga la convergencia uniforme: la construcción de la sucesión impide que éste sea el caso.

6) Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones definidas sobre $(X, \mathscr{A}, \mu)$ que converge μ-casi uniformemente hacia f. Podemos ver entonces que el conjunto $\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$ está contenido por definición en $X \setminus A_\varepsilon$ y que se tiene $\mu(X \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$ de donde se deduce la convergencia en μ-medida.

7) Para encontrar un contra ejemplo, utilizamos otra vez las funciones $f_n(x) = \mathbb{1}_{[j2^{-k},(j+1)2^{-k}[}(x)$. Vemos entonces que $\int_0^1 f_n(x)dx = 2^{-k} \longrightarrow 0$ pero esta sucesión no converge μ-casi uniformemente.

8) Utilizamos aquí las funciones $f_n(x) = n^{1/p}\mathbb{1}_{[0,1/n[}(x)$. Esta funciones tienden hacia cero μ-casi uniformemente (ver el segundo punto de esta demostración) pero no en p-promedio.

■

Con los resultados anteriores vemos que estas nociones de convergencia son realmente distintas las unas de las otras, lo que implica que cada una de ellas tiene su importancia y utilidad.

A menudo es interesante estudiar el modo de convergencia de subsucesiones. El teorema a continuación nos proporciona un resultado en este sentido.

Teorema 4 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sean $f, f_n : X \longrightarrow \mathbb{K}$ funciones medibles. Si la sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia f en μ-medida, entonces existe una subsucesión de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge μ-casi uniformemente y en μ-casi todas partes.*

Demostración. Dado que la convergencia μ-casi uniforme implica la convergencia en μ-casi todas partes, nos concentramos en este primer modo de convergencia. Sea pues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge hacia f en μ-medida. Existe entonces una sucesión estríctamente creciente de enteros positivos $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tales que, para todo $n \geq k$ se tenga

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > 2^{-k}\}) < 2^{-k}. \tag{5}$$

Sea ahora $\varepsilon > 0$ un real cualquiera y sea p un entero tal que $2^{1-p} < \varepsilon$. Definimos el conjunto

$$A_p = \bigcup_{k=p}^{+\infty} \left\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| > 2^{-k}\right\},$$

que representa los puntos tales que f_{n_k} se encuentra a una cierta distancia de f.

Entonces tenemos que $\mu(A_p) \leq \sum_{k=p}^{+\infty} 2^{-k} = 2^{1-p} < \varepsilon$ por la estimación (5) y por la subaditividad de la medida μ y además, sobre $X \setminus A_p$ se tiene $|f_{n_k}(x) - f(x)| < 2^{-k} \leq 2^{-p} < \varepsilon$ para todo $k \geq p$, es decir que se tiene la convergencia uniforme en este conjunto. Se deduce pues que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f$ μ-casi uniformemente.

■

* * *

....y ¿qué sucede si $p = +\infty$?

Proposición 3 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido.*

1) La convergencia en L^∞ implica la convergencia en μ-casi todas partes, pero la convergencia en μ-casi todas partes no implica la convergencia en L^∞.

2) La convergencia en L^∞ implica la convergencia μ-casi uniforme, pero la convergencia μ-casi uniforme no implica la convergencia en L^∞.

3) La convergencia en L^∞ implica la convergencia en μ-medida, pero la convergencia en μ-medida no implica la convergencia en L^∞.

4) La convergencia en L^p para todo $(1 \leq p < +\infty)$ no implica la convergencia en L^∞ y la convergencia en L^∞ no implica la convergencia en L^p.

Prueba. Para la demostración de estos puntos utilizaremos algunas de las sucesiones presentadas en las verificaciones anteriores.

1. La primera parte del primer punto es inmediata, para la segunda parte escogemos la sucesión de funciones sobre $X = [0, +\infty[$ $f_n(x) = \mathbb{1}_{[n,n+1]}(x)$ que tiende a cero en μ-casi todas partes pero se tiene $\|f_n\|_{L^\infty} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Tenemos el punto 2) a partir de la definición de convergencia μ-casi uniforme en donde se exige que el conjunto en donde falla la convergencia uniforme sea pequeño y esta condición siempre está verificada en el caso de la convergencia en L^∞, pues el conjunto en donde no se tiene la convergencia uniforme es de medida nula. La recíproca no se tiene como lo muestra el ejemplo siguiente sobre $X = [0, 1]$: $f_n(x) = n\mathbb{1}_{[0,1/n[}(x)$ converge μ-casi uniformemente hacia cero pero no en L^∞.

3. Si una sucesión de funciones converge en μ-medida, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero N suficientemente grande tal que para todo $n \geq N$ se tenga $\mu(\{x \in X : |f_n - f| > \varepsilon\}) \leq \varepsilon$, esta condición es trivialmente verificada si la sucesión converge en L^∞ pues la medida de este conjunto es entonces nula, lo que muestra el punto 3).

4. Finalmente, para el último punto, terminamos la demostración utilizando el teorema 1.

■

2. Caso en donde $\mu(X) < +\infty$

En este caso, vamos a ver que se tienen cierto tipo de implicaciones que no se tienen en el caso general.

Lema 1 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles a valores en $\mathbb{K}$. Definimos, para todo $k, m \geq 1$ los conjuntos*

$$A_{k,m} = \bigcap_{n=m}^{+\infty} \left\{ x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \right\}.$$

Si para cada entero k fijo se tiene $\lim\limits_{m\to+\infty} \mu(X \setminus A_{k,m}) = 0$ entonces $f_n \longrightarrow f$ μ-casi uniformemente.

Prueba. Sea $\varepsilon > 0$ un real, para cada $k \geq 1$ existe un entero m_k tal que $\mu(X \setminus A_{k,m_k}) < \varepsilon 2^{-k}$. Si definimos $A_\varepsilon = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_{k,m_k}$ tenemos por un lado

$$\mu(X \setminus A_\varepsilon) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (X \setminus A_{k,m_k})\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(X \setminus A_{k,m_k}) < \varepsilon;$$

por otro lado, si $\delta > 0$ y si $k\delta > 1$ entonces se tiene $|f_n(x) - f(x)| < 1/k < \delta$ para todo $x \in A_\varepsilon$ y todo $n \geq m_k$. Es decir $f_n \longrightarrow f$ uniformemente sobre A_ε.

■

Teorema 5 (Egoroff) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y supongamos que $\mu(X) < +\infty$. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles a valores en $\mathbb{K}$ definidas sobre X que convergen en μ-casi todas partes hacia una función f.*
Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $A \in \mathscr{A}$ con $\mu(X \setminus A) < \varepsilon$ tal que f_n converja uniformemente hacia f sobre A.

Dicho de otra manera, cuando la medida del conjunto X es finita, la convergencia en μ-casi todas partes implica la convergencia μ-casi uniforme.

Demostración. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge en μ-casi todas partes hacia f. Definimos $A = \{x \in X : \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)\}$ y tenemos entonces que $\mu(X \setminus A) = 0$.

Si consideramos los conjuntos $A_{k,m}$ del lema anterior, notamos que para todo $k \geq 1$ se tienen las inclusiones $A_{k,1} \subset A_{k,2} \subset ...$ y $A \subset \bigcup_{m=1}^{+\infty} A_{k,m}$.

Estas dos observaciones implican $\bigcap_{m=1}^{+\infty} (X \setminus A_{k,m}) \subset X \setminus A$. Nótese que la sucesión formada por los conjuntos $B_m = X \setminus A_{k,m}$ es decreciente y que $\mu(B_1) \leq \mu(X) < +\infty$.

Aplicamos entonces el teorema de continuidad de las medidas para obtener que $\lim\limits_{m\to+\infty} \mu(X \setminus A_{k,m}) = 0$ para cada $k \geq 1$. En este punto aplicamos el lema anterior para concluir que $f_n \longrightarrow f$ μ-casi uniformemente.

■

Teorema 6 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido tal que $\mu(X) < +\infty$ y sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones pertenecientes al espacio $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ con $1 \leq p < +\infty$. Entonces*

1) la convergencia uniforme implica la convergencia en p-promedio,

2) la convergencia en μ-casi todas partes implica la convergencia en μ-medida,

Demostración.

1) Si la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente y si $0 < \mu(X) < +\infty$, entonces para todo real ε existe un entero N tal que, para todo $x \in X$ y $n \geq N$, se tenga $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\mu(X)^{-1/p}$. Integrando esta estimación obtenemos la desigualdad $\int_X |f_n(x) - f(x)|^p d\mu(x) < \varepsilon^p$ lo que muestra que la función límite pertenece a $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y que se tiene la convergencia en p-promedio.

2) Por el teorema de Egoroff tenemos que la convergencia en μ-casi todas partes implica la convergencia μ-casi uniforme, aplicamos entonces el punto 6) del teorema 3 para obtener el resultado deseado.

■

3. Una hipótesis suplementaria: la condición de acotación

Vamos a suponer ahora que la sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica una condición de acotación. Bajo esta hipótesis suplementaria veremos que obtenemos resultados interesantes.

Teorema 7 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles definidas sobre X a valores en $\mathbb{K}$.*

Si existe una función $g \in L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ para algún un real $p \in [1, +\infty[$ tal que $|f_n| \leq g$ en μ-casi todas partes para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

1) la convergencia en μ-casi todas partes implica la convergencia en L^p.

2) la convergencia en μ-medida implica la convergencia en L^p.

Prueba.

1. El primer punto no es más que el teorema de convergencia dominada de Lebesgue en su versión L^p.

2. Para el segundo punto partimos de una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge en μ-medida hacia una función f. Sea entonces $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión tal que

$$\lim_{k\to+\infty} \|f_{n_k} - f\|_{L^p} = \limsup_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^p}$$

Dado que la sucesión de funciones $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge en μ-medida hacia una función f, tenemos por el teorema 4 que existe una subsucesión de $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, que seguiremos notando por comodidad $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, que converge en μ-casi todas partes hacia f. Aplicamos entonces la primera parte de esta proposición para obtener que $\lim\limits_{k\to+\infty} \|f_{n_k} - f\|_{L^p} = \limsup\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0$, de donde se deduce que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0$.

■

Observación 1 Dado que la convergencia μ-casi uniforme implica la convergencia en μ-medida (ver el teorema 3 punto 6)), si tenemos una hipótesis de acotación, obtenemos que la convergencia μ-casi uniforme implica la convergencia en L^p.

Para terminar nuestro estudio entre los diversos modos de convergencia, vamos a ver que con una hipótesis de acotación, la convergencia en μ-casi todas partes implica la convergencia μ-casi uniforme:

Teorema 8 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles definidas sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Si existe una función $g \in L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ para algún un real $p \in [1, +\infty[$ tal que $|f_n| \leq g$ en μ-casi todas partes para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la convergencia en μ-casi todas partes implica la convergencia μ-casi uniforme.*

Prueba. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ en μ-c.t.p. Vamos a utilizar el lema 1 para caracterizar la convergencia μ-casi uniforme y definimos entonces los conjuntos

$$A = \{x \in X : \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)\} \text{ y } A_{k,m} = \bigcap_{n=m}^{+\infty} \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}\}.$$

Siguiendo este lema, para obtener la convergencia μ-casi uniforme de la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, basta mostrar que para todo $k \geq 1$ se tiene $\lim\limits_{m\to+\infty} \mu(X \setminus A_{k,m}) = 0$. Como se tienen las inclusiones de conjuntos $X \setminus A_{k,1} \supseteq X \setminus A_{k,2} \supseteq \cdots$ y que $\bigcap_{m=1}^{+\infty}(X \setminus A_{k,m}) \subseteq X \setminus A$, es necesario verificar que para todo $k, m \geq 1$ se tiene $\mu(X \setminus A_{k,m}) < +\infty$ para poder aplicar el teorema de continuidad de las medidas y obtener $\lim\limits_{m\to+\infty} \mu(X \setminus A_{k,m}) = 0$.

Tenemos pues por hipótesis que existe un conjunto de μ-medida nula $\mathcal{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ $|f_n(x)| \leq g(x)$ sobre $X \setminus \mathcal{N}$ y tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ sobre $X \setminus \mathcal{N}$. Dado que para todo $n \geq m$ tenemos $|f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{l\to+\infty} |f_n(x) - f_l(x)| \leq 2g(x)$, tenemos la inclusión de conjuntos $\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq 1/k\} \subseteq \{x \in X : 2g(x) \geq 1/k\}$ de manera que obtenemos $X \setminus A_{k,m} \subseteq \mathcal{N} \cup \{x \in X : 2g(x) \geq 1/k\}$ y podemos escribir

$$\|g\|_{L^p}^p \geq \int_{X\setminus A_{k,m}} g^p(x)d\mu(x) \geq (2k)^{-1}\mu(X \setminus A_{k,m}).$$

De donde se deduce, por la hipótesis de acotación, que las cantidades $\mu(X \setminus A_{k,m})$ son finitas terminando así la demostración.

$\blacksquare$

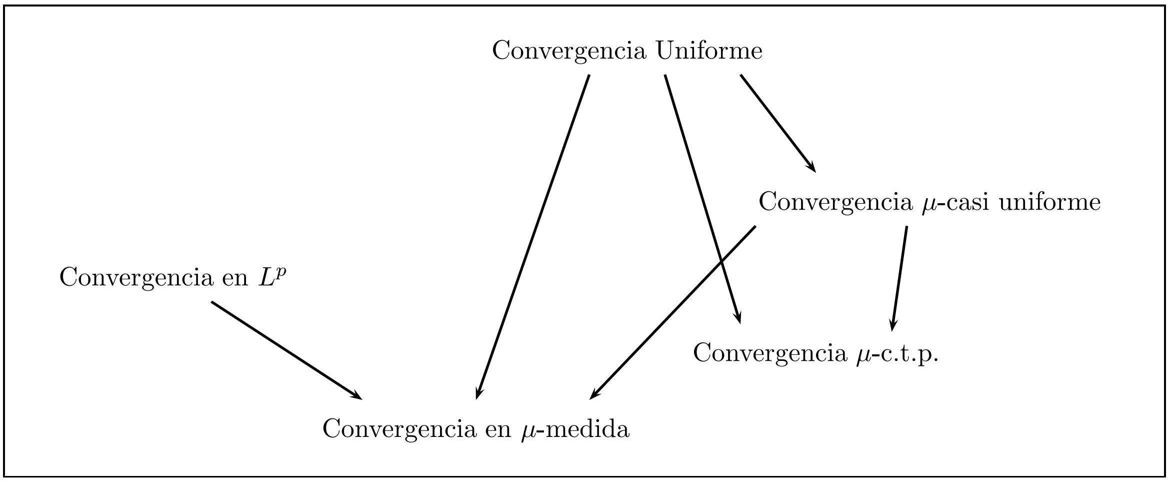

Figura 1: Relaciones entre los modos de convergencia - caso general

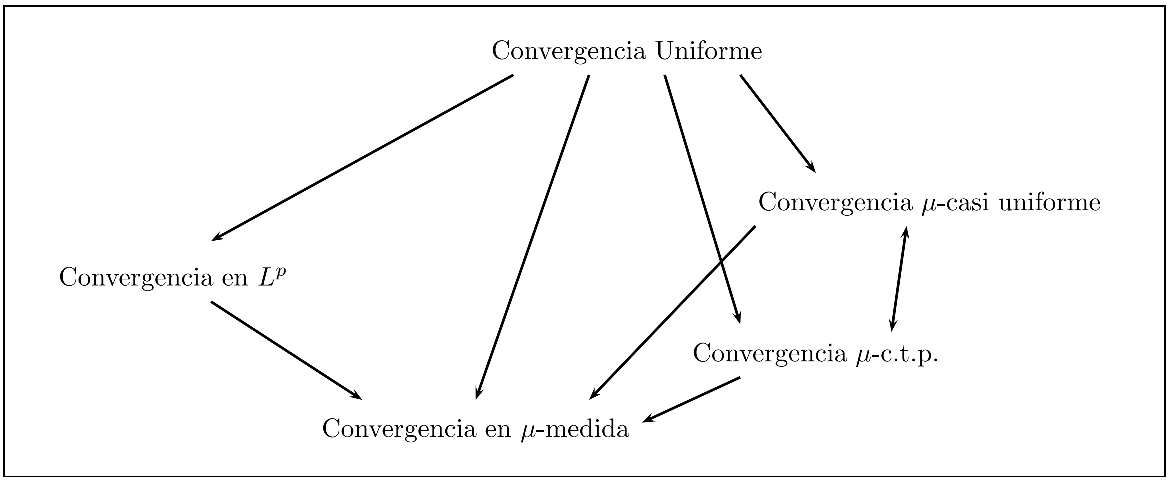

Figura 2: Relaciones entre los modos de convergencia - caso $\mu(X) < +\infty$

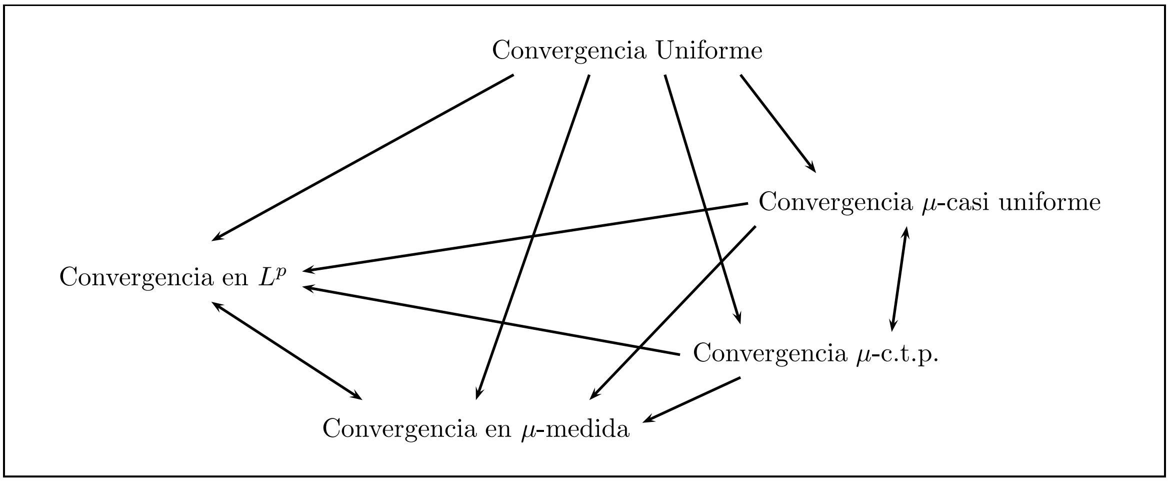

Figura 3: Relaciones entre los modos de convergencia - condición de acotación