Lección n°8: Resultados de Densidad y Espacios Locales

EPN, verano 2009

1. Densidad y separabilidad de los espacios de Lebesgue

1.1. Definiciones

Definición 1 (Densidad en un espacio normado) *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio normado. Un subconjunto A de E es* denso *en $(E, \|\cdot\|_E)$ si para todo punto $x \in E$ y todo real $\varepsilon > 0$, existe un punto $y \in A$ tal que $\|x - y\|_E \leq \varepsilon$. Diremos entonces que A es denso en E* en el sentido de la norma $\|\cdot\|_E$.

Observación 1 Esta caracterización de los espacios densos se mantiene en el caso de los espacios métricos (E, d_E) reemplazando convenientemente la norma $\|\cdot\|_E$ por la distancia d_E.

El ejemplo clásico $\Longrightarrow$ $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

Proposición 1 (Transitividad de la densidad) *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio vectorial normado y sean A y B dos subconjuntos de E. Si $A \subset B$ es denso en B y si $B \subset E$ es un conjunto denso en E en el sentido de la norma $\|\cdot\|_E$, entonces A es denso en E.*

Prueba. Sea x un elemento de E y $\varepsilon > 0$ un real. Como B es denso en E, existe un elemento $y \in B$ tal que $\|x - y\|_E \leq \varepsilon/2$. Una vez este elemento $y \in B$ fijado, como A es denso en B en el sentido de la norma $\|\cdot\|_E$, existe un elemento $z \in A$ tal que $\|y - z\|_E \leq \varepsilon/2$. Dado que tenemos por la desigualdad triangular la estimación

$$\|x - z\|_E \leq \|x - y\|_E + \|y - z\|_E \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

podemos concluir que A es denso en E.

$\blacksquare$

Definición 2 (Espacio separable) *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio normado. Diremos que E es un espacio* separable *si existe un subconjunto denso numerable.*

Proposición 2 *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio normado separable y sea F un subconjunto de E, entonces F es separable.*

Prueba. Sea $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un subconjunto denso y numerable de E y sea $\alpha_m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ una sucesión de reales positivos. Como F es un subconjunto de E, existe para todo $z \in F$ y todo $\alpha_m > 0$, un punto e_n tal que $\|z - e_n\|_E \leq \alpha_m$. Si m es suficientemente grande, existe $e_n \in B(z, \alpha_m) \subset F$ y notamos este elemento $e_{n,m}$. La colección de los puntos $(e_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ es entonces un subconjunto numerable y denso de F.

$\blacksquare$

Definición 3 (Sistema Total) *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio vectorial normado. Diremos que un subconjunto T de E es* total en E *si el subespacio vectorial $Vect(T)$, formado por todas las combinaciones lineales de elementos de T, es denso en E.*

Un ejemplo $\Longrightarrow$ $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ con $T = (e_j)_{1\leq j\leq n}$ una base de $\mathbb{R}^n$ pues $Vect(T) = \mathbb{R}^n$. Más generalmente se tiene que todo espacio vectorial de dimensión finita es separable.

$\Longrightarrow$ La numerabilidad de un sistema total permite caracterizar la separabilidad de un espacio vectorial normado.

Proposición 3 *Un espacio vectorial normado $(E, \|\cdot\|_E)$ es separable si y solo si admite un sistema total numerable.*

Demostración. Si el espacio $(E, \|\cdot\|_E)$ es separable, existe un subconjunto T denso numerable de E. Tenemos entonces $T \subset Vect(T)$ y por lo tanto $Vect(T)$ es denso en E, de donde se deduce que T es un sistema total en E. Recíprocamente, si T es un sistema total numerable de E, para todo $x \in E$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe $y \in Vect(T)$ tal que $\|x - y\|_E \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Notamos luego $Vect_Q(T)$ el conjunto de las combinaciones lineales de elementos de T con coeficientes en $Q = \mathbb{Q}$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) o en $Q = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). No es difícil ver que $Vect_Q(T)$ es denso en $Vect(T)$ y por lo tanto, para todo $y \in Vect(T)$, existe $z \in Vect_Q(T)$ tal que $\|y - z\|_E \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Tenemos entonces que $Vect_Q(T)$ es denso en E pues $\|x - z\|_E \leq \|x - y\|_E + \|y - z\|_E \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Vemos finalmente que $Vect_Q(T)$ es numerable pues es la imagen del conjunto numerable $\bigcup_{n\geq 1}(Q^n \times T^n)$ por la aplicación f determinada por $f(\lambda_1, ..., \lambda_n, x_1, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$ y podemos de esta manera concluir la demostración.

$\blacksquare$

$\Longrightarrow$ Es importante tener un argumento que nos diga cuando un espacio de Banach *no* es separable.

Proposición 4 *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach. Si existe una familia $(A_i)_{i\in I}$ que verifica los tres puntos a continuación*

1) para todo $i \in I$ el conjunto A_i es un abierto no vacío de E,

2) si $i \neq j$ entonces $A_i \cap A_j = \emptyset$,

3) I es un conjunto no numerable,

entonces el espacio E no es separable.

Prueba. Para la verificación de este hecho procederemos por el absurdo. Supongamos pues que E es separable y sea $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión densa en E. Tenemos entonces por definición de subconjunto denso que para todo $i \in I$ se tiene $A_i \cap (e_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq \emptyset$. Escogemos entonces $n(i)$ tal que $e_{n(i)} \in A_i$ de manera que la aplicación $\varphi : i \longmapsto n(i)$ es inyectiva: en efecto si $n(i) = n(j)$ entonces $e_{n(i)} = e_{n(j)} \in A_i \cap A_j$ y por lo tanto $i = j$. Esto implica que el conjunto I es numerable lo que es una contradicción con el tercer punto.

$\blacksquare$

Algunos espacios de funciones útiles

A) Dos tipos de funciones simples medibles

Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito.

1) $\mathcal{S}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ conjunto de funciones simples que se escriben $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$ en donde $(\alpha_k)_{0\leq k\leq n} \in \mathbb{K}$ y $(A_k)_{0\leq k\leq n} \in \mathscr{A}$.

2) $\mathcal{S}_I(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ conjunto de funciones simples integrables si $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ es de μ-medida finita.

Definición 4 (Soporte de una función) *Sea X un espacio topológico. El* soporte *de una función $f: X \longrightarrow \mathbb{K}$ está definido como*
$$sop(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

B) Funciones continuas a soporte compacto

Definición 5 (Espacio $\mathcal{C}_c^0(X, \mathbb{K})$) *Sea X un espacio topológico separado localmente compacto a base numerable. Definimos el conjunto de funciones $\mathcal{C}_c^0(X, \mathbb{K})$ como el conjunto de funciones continuas $f: X \longrightarrow \mathbb{K}$ a soporte contenido en un compacto.*

Estas funciones son acotadas y se anulan fuera de un cierto compacto que contiene su soporte.

Proposición 5 *El espacio de funciones continuas a soporte compacto $\mathcal{C}_c^0(X, \mathbb{K})$ es un espacio vectorial.*

Observación 2 Si la medida μ es finita sobre los compactos, entonces $\mathcal{C}_c^0(X, \mathbb{K}) \subset L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ para todo $1 \leq p \leq +\infty$: en efecto, si $f \in \mathcal{C}_c^0(X, \mathbb{K})$ y si notamos K el compacto que contiene el soporte de f, tenemos
$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \leq \sup_{x \in K} |f(x)|^p \mu(K) < +\infty.$$

C) Funciones continuas que se anulan al infinito

Definición 6 (Espacio $\mathcal{C}_0^0(X, \mathbb{K})$) *Sea X un espacio topológico separado localmente compacto a base numerable. Diremos que una función $f: X \longrightarrow \mathbb{K}$ se* anula al infinito *si para todo $\varepsilon > 0$ existe un compacto K de X tal que $|f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in K^c$. Notaremos $\mathcal{C}_0^0(X, \mathbb{K})$ el conjunto de todas las funciones continuas definidas sobre X a valores en $\mathbb{K}$ que se anulan al infinito.*

El lector observará que se tiene la inclusión estricta de espacios
$$\mathcal{C}_c^0(X, \mathbb{K}) \subsetneq \mathcal{C}_0^0(X, \mathbb{K}) \subsetneq L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$$
pero que por lo general no existe ninguna relación de inclusión entre los espacios $\mathcal{C}_0^0(X, \mathbb{K})$ y los espacios de Lebesgue $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ con $1 \leq p < +\infty$. Así por ejemplo si consideramos la función determinada por $f(x) = 1$ sobre $[-1, 1]$ y $f(x) = |x|^{-1/p}$ sino, tenemos entonces que para todo $\varepsilon > 0$ existe un compacto K tal que $|f(x)| < \varepsilon$ (basta fijar $K \supset] - \varepsilon^{-p}, \varepsilon^{-p}[$) y de esta manera se tiene $f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pero $f \notin L^p(\mathbb{R})$.

Observación 3 Si el espacio X es compacto $\mathcal{C}_c^0(X, \mathbb{K}) = \mathcal{C}_0^0(X, \mathbb{K})$.

1.2. Densidad en los espacios L^p con $1 \leq p < +\infty$

Teorema 1 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito. El conjunto de las funciones simples integrables $\mathcal{S}_I(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ es denso en $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$.*

Antes de pasar a la demostración de este resultado, recordamos que el espacio de funciones simples $\mathcal{S}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ no es necesariamente un subconjunto de $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Por ejemplo si $\mu(X) = +\infty$ la función $\varphi(x) = \mathbb{1}_X(x)$ pertenece al espacio $\mathcal{S}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ pero $\varphi \notin L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ para todo $1 \leq p < +\infty$ y es por esta razón que consideramos el conjunto de funciones *integrables*.

Demostración. Vamos a considerar solamente el caso real $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ pues el caso complejo se deduce sin mayor problema considerando por separado las partes reales e imaginarias de las funciones que entran en consideración.

Sea pues $f \in L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$ con $1 \leq p < +\infty$. Por el teorema de aproximación de funciones medibles, existen dos sucesiones de funciones $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pertenecientes al espacio $\mathcal{S}_I(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$ tales que $f^+ = \lim\limits_{n \to +\infty} g_n$ y

$f^- = \lim\limits_{n\to+\infty} h_n$. Determinamos entonces una nueva sucesión escribiendo $f_n = g_n - h_n$ de forma que cada función f_n es una función simple $\mathscr{A}$-medible que verifica $|f_n| \leq |f|$ en μ-casi todas partes y que pertenece al espacio $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$.

Dado que estas funciones verifican $|f_n(x) - f(x)| \leq 2|f(x)|$ y que se tiene $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$ en μ-casi todas partes, podemos aplicar el teorema de convergencia dominada en su versión L^p a las funciones $|f_n - f|$ para obtener que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0$ y con esto terminamos la demostración del teorema.

■

Teorema 2 *Sea X un espacio topológico separado localmente compacto a base numerable y sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido regular. Entonces el espacio de funciones continuas a soporte compacto $\mathcal{C}_c^0(X, \mathbb{K})$ es denso en $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ con $1 \leq p < +\infty$.*

Demostración. Tratamos únicamente el caso real. Vamos a mostrar que el espacio $\mathcal{C}_c^0(X, \mathbb{R})$ es denso en el sentido de L^p en $\mathcal{S}_I(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$ y, por la transitividad de la densidad expuesta en la proposición 1, a partir de este resultado se deducirá la densidad de $\mathcal{C}_c^0(X, \mathbb{R})$ en $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$.

Como las funciones del espacio $\mathcal{S}_I(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$ son combinaciones lineales finitas de funciones indicatrices de conjuntos de medida finita, podemos concentrarnos en las funciones de tipo $\mathbb{1}_A$ en donde $A \in \mathscr{A}$ y $\mu(A) < +\infty$. Dado que el espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es regular, por el teorema de aproximación de medidas regulares, tenemos que para todo conjunto $A \in \mathscr{A}$ y para todo $\varepsilon > 0$ existen un conjunto cerrado F y U un conjunto abierto tales que $F \subset A \subset U$ y tales que $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$.

Aplicamos aquí el lema de Urysohn que nos asegura la existencia de una función continua $\psi : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $\psi(F) = 1$ y $\psi(U^c) = 0$. Vemos entonces sin problema que $\psi \in \mathcal{C}_c^0(X, \mathbb{R})$ y podemos escribir:

$$\int_X |\mathbb{1}_A(x) - \psi(x)|^p d\mu(x) \leq \mu(U \setminus F) < \varepsilon.$$

Esto muestra que las funciones continuas a soporte compacto son densas en las funciones simples integrables y se concluye que $\mathcal{C}_c^0(X, \mathbb{R})$ es denso en $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$.

■

1.3. Separabilidad de los espacios L^p con $1 \leq p < +\infty$

Definición 7 (σ-álgebra numerablemente generada) *Sea $\mathscr{A}$ una σ-álgebra sobre un conjunto X. Diremos que la σ-álgebra $\mathscr{A}$ es* numerablemente engendrada *si existe un conjunto de cardinal numerable $\mathcal{K} \in \mathscr{A}$ tal que $\sigma(\mathcal{K}) = \mathscr{A}$.*

Por ejemplo, si $X = \mathbb{R}^n$ tenemos que la σ-álgebra $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^n)$ es numerablemente engendrada por los cubos diádicos. Nótese que este también es el caso para los espacios topológicos separados localmente compactos a base numerable dotados de sus σ-álgebras borelianas respectivas.

Teorema 3 (Condición de separabilidad) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea p un real tal que $1 \leq p < +\infty$. Si la medida μ es σ-finita y si la σ-álgebra es numerablemente engendrada, entonces el espacio de Lebesgue $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ es separable.*

Para la demostración de este resultado utilizaremos dos lemas.

Lema 1 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido de masa total finita. Sea $\mathcal{A}$ una álgebra de subconjuntos de X tal que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathscr{A}$. Entonces $\mathcal{A}$ es denso en $\mathscr{A}$ en el sentido que, para todo $A \in \mathscr{A}$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe un conjunto A_0 que pertenece a $\mathcal{A}$ que verifica $\mu(A \Delta A_0) \leq \varepsilon$.*

Prueba. Sea $\mathcal{F}$ la familia de conjuntos que pertenecen a $\mathscr{A}$ tales que para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $A_0 \in \mathcal{A}$ que satisface $\mu(A\Delta A_0) \leq \varepsilon$. Vamos a mostrar que $\mathcal{F} = \mathscr{A}$ y para ello vamos a verificar que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra.

Vemos para empezar que $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$, de manera que se tiene $X \in \mathcal{F}$. Como se tiene la identidad $A^c\Delta A_0^c = A\Delta A_0$, podemos decir que si $A \in \mathcal{F}$ entonces $A^c \in \mathcal{F}$ y entonces $\mathcal{F}$ es estable por complementación. Sea ahora $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos de $\mathcal{F}$ y sea $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y $\varepsilon > 0$. Dado que $\mu(X) < +\infty$, podemos fijar un entero N suficientemente grande tal que $\mu(A \setminus \cup_{n=0}^{N-1} A_n) \leq \varepsilon/2$ y para $n = 0, ..., N-1$ fijamos un conjunto $B_n \in \mathcal{A}$ que verifica $\mu(A_n\Delta B_n) \leq \frac{\varepsilon}{2N}$. El conjunto B_0 determinado por $B_0 = \bigcup_{n=0}^{N-1} B_n$ pertenece entonces a $\mathcal{A}$ y satisface

$$\begin{aligned}
\mu(A\Delta B_0) &\leq \mu\left(A\Delta\left(\bigcup_{n=0}^{N-1} A_n\right)\right) + \mu\left(\left(\bigcup_{n=0}^{N-1} A_n\right)\Delta B_0\right)\\
&\leq \mu\left(A\Delta\left(\bigcup_{n=0}^{N-1} A_n\right)\right) + \sum_{n=0}^{N-1}\mu\left(A_n\Delta B_n\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=0}^{N-1}\frac{\varepsilon}{2N} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como es posible encontrar un conjunto B_0 con estas propiedades para todo $\varepsilon > 0$, tenemos que $A \in \mathcal{F}$ de donde se deduce que $\mathcal{F}$ es estable por reunión numerable y por lo tanto que es una σ-álgebra. Finalmente como se tienen las inclusiones $\mathcal{A} \subset \mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{A}) = \mathscr{A}$ podemos concluir que $\mathcal{F} = \mathscr{A}$.

■

Lema 2 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito. Sea $\mathcal{A}$ una álgebra de partes de X tal que*

1) $\sigma(\mathcal{A}) = \mathscr{A}$,

2) X es la unión de una sucesión de conjuntos que pertenecen a $\mathcal{A}$ de μ-medida finita.

Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ y todo conjunto $A \in \mathscr{A}$ tal que $\mu(A) < +\infty$, existe un conjunto $A_0 \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A\Delta A_0) \leq \varepsilon$.

Prueba. Por hipótesis existe una sucesión de conjuntos $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que pertenecen a $\mathcal{A}$ de μ-medida finita tales que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Reemplazando B_n por $\bigcup_{k=0}^{n} B_k$ podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la sucesión $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente. Sean ahora $\varepsilon > 0$ un real y $A \in \mathscr{A}$ un conjunto tal que $\mu(A) < +\infty$. Como la sucesión creciente $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ recubre X, existe un entero N tal que $\mu(A \cap B_N) \geq \mu(A) - \varepsilon/2$. Construimos entonces una medida finita escribiendo $\nu : C \longmapsto \mu(C) = \mu(C \cap B_N)$ y podemos usar el lema 1 para obtener un conjunto $E \in \mathcal{A}$ que verifica $\nu(A\Delta E) = \mu((A\Delta E) \cap B_N) \leq \varepsilon/2$. Nótese que el conjunto $E \cap B_N$ pertenece a $\mathcal{A}$; luego, utilizando la inclusión $A\Delta B \subset A\Delta C \cup C\Delta B$ para todo A, B, C, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\mu(A\Delta(E \cap B_N)) &\leq \mu(A\Delta(A \cap B_N)) + \mu((A \cap B_N)\Delta(E \cap B_N))\\
&= \mu(A \setminus (A \cap B_N)) + \mu((A\Delta E) \cap B_N) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Si definimos $A_0 = E \cap B_N$ se obtiene el resultado deseado.

■

Demostración del teorema 3. Por hipótesis existe una familia numerable $\mathcal{K}$ de $\mathscr{A}$ que genera $\mathscr{A}$ y que contiene una sucesión de conjuntos $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de μ-medida finita tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Notemos $\tilde{\mathcal{K}}$ el conjunto formado por los conjuntos de $\mathcal{K}$ al cual añadimos sus complementarios y consideremos $\mathcal{A}$ el álgebra (cuidado, no la σ-álgebra) engendrada por $\mathcal{K}$. Tenemos entonces que $\mathcal{A}$ es el conjunto formado por uniones finitas de conjuntos de la forma $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N$ para algún N y algunos $(A_i)_{1\leq i\leq N} \in \tilde{\mathcal{K}}$. Tenemos por lo tanto que $\mathcal{A}$ es numerable y verifica las hipótesis del lema 2.

Consideramos entonces la colección de todas las sumas finitas $\sum_{j=0}^{n} q_j \mathbb{1}_{D_j}(x)$ en donde $q_j \in Q$ con $Q = \mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $Q = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y en donde $D_j \in \mathcal{A}$ y verifica $\mu(D_j) < +\infty$. Esta colección es numerable y está contenida en el espacio de Lebesgue $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Vamos a demostrar que esta colección es un subconjunto denso.

Sea pues $f \in L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y sea $\varepsilon > 0$ un real. Sabemos en particular por el teorema de aproximación por funciones simples que existe una función simple g que pertenece al espacio $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ tal que $\|f - g\|_{L^p} \leq \varepsilon$. Suponemos que la función g se escribe como $\sum_{j=0}^n \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}(x)$ en donde cada conjunto A_j pertenece a $\mathscr{A}$ y verifica $\mu(A_j) < +\infty$. Podemos encontrar sin problemas números racionales q_j tales que se tenga

$$\left\| g - \sum_{j=0}^n q_j \mathbb{1}_{A_j} \right\|_{L^p} = \left\| \sum_{j=0}^n \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} - \sum_{j=0}^n q_j \mathbb{1}_{A_j} \right\|_{L^p} \leq \sum_{j=0}^n |\alpha_j - q_j| \|\mathbb{1}_{A_j}\|_{L^p} \leq \varepsilon.$$

Utilizando el lema 2 es posible encontrar conjuntos $D_j \in \mathcal{A}$ tales que

$$\left\| \sum_{j=0}^n q_j \mathbb{1}_{A_j} - \sum_{j=0}^n q_j \mathbb{1}_{D_j} \right\|_{L^p} \leq \varepsilon.$$

Dado que se tienen las estimaciones

$$\left\| f - \sum_{j=0}^n q_j \mathbb{1}_{D_j} \right\|_{L^p} \leq \|f - g\|_{L^p} + \left\| g - \sum_{j=0}^n q_j \mathbb{1}_{A_j} \right\|_{L^p} + \left\| \sum_{j=0}^n q_j \mathbb{1}_{A_j} - \sum_{j=0}^n q_j \mathbb{1}_{D_j} \right\|_{L^p} \leq 3\varepsilon$$

podemos finalmente dar por terminada la demostración de este teorema.

■

Este resultado tiene como consecuencia directa la aserción siguiente que siempre conviene tener en mente.

Corolario 1 *Los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), \lambda_n, \mathbb{K})$ con $1 \leq p < +\infty$ son separables.*

1.4. Densidad en los espacios L^∞

Teorema 4 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito. Entonces el espacio formado por las funciones simples $\mathcal{S}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ es denso en $L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$.*

Demostración. Tratamos aquí solamente el caso real, como en los enunciados precedentes el caso complejo se deduce sin mayor problema a partir de este resultado. Sea entonces $f \in L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$ una función y sea $\varepsilon > 0$ un real. Si consideramos el intervalo real $I = [-\|f\|_{L^\infty}, \|f\|_{L^\infty}]$ podemos escoger números reales $-\|f\|_{L^\infty} = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = \|f\|_{L^\infty}$ tales que los intervalos $]a_i, a_{i+1}]$ tengan una longitud inferior o igual a ε y formen un recubrimiento de I. Definimos luego los conjuntos $A_i = f^{-1}(]a_i, a_{i+1}])$ para todo $i = 0, ..., n-1$ y construimos la función $f_\varepsilon(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$. Por construcción estas funciones f_ε son funciones simples $\mathscr{A}$-medibles y verifican $\|f - f_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$. Hemos entonces terminado la demostración del teorema.

■

Contrariamente al teorema 2 tenemos el resultado siguiente.

Proposición 6 *Sea X un espacio topológico separado localmente compacto a base numerable y sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido regular. Entonces*

1) las funciones continuas a soporte compacto $\mathcal{C}_c^0(X, \mathbb{K})$ y las funciones continuas que tienden a cero al infinito $\mathcal{C}_0^0(X, \mathbb{K})$ no son densas *en el espacio $L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$.*

2) Si $\mu(X) = +\infty$, entonces las funciones simples integrables $\mathcal{S}_I(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ no son densas *en el espacio $L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$.*

Prueba. La función $f = \mathbb{1}_X$ pertenece al espacio $L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ pero para toda función φ continua a soporte compacto o continua que tiende a cero al infinito se tiene $\|f - \varphi\|_{L^\infty} > 1/2$.

Si $\mu(X) = +\infty$, una función simple integrable ψ verifica $\mu(\{x \in X : \psi \neq 0\}) = 0$ y el mismo ejemplo anterior muestra que el conjunto $\mathcal{S}_I(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ no es denso en el espacio $L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$.

■

A pesar de tener este resultado negativo, existe una relación de densidad entre el espacio de funciones a soporte compacto y el espacio de funciones continuas que se anulan al infinito:

Teorema 5 *Las funciones continuas a soporte compacto $\mathcal{C}_c^0(X, \mathbb{K})$ son densas en el sentido de la norma $\|\cdot\|_{L^\infty}$ en el espacio $\mathcal{C}_0^0(X, \mathbb{K})$ formado por las funciones continuas que se anulan al infinito.*

Demostración. Sea f una función del espacio $\mathcal{C}_0^0(X, \mathbb{K})$ y sea $\varepsilon > 0$ un real. Por definición de función que se anula al infinito, existe un compacto $K \subset X$ tal que $\sup\limits_{x \in K^c} |f(x)| < \varepsilon$ y esto permite concentrar nuestra atención al compacto K. En realidad vamos a considerar un compacto $\tilde{K}$ un poco más grande tal que $K \subset \tilde{K}$. Definimos entonces una función continua ψ que coincida con f sobre K y que se anule afuera de $\tilde{K}$: de esta manera ψ es una función continua a soporte compacto. Tenemos entonces que $\|f - \psi\|_{L^\infty} < \varepsilon$ de donde se deduce que el conjunto de funciones continuas a soporte compacto es denso en las funciones continuas que se anulan al infinito.

■

Pasemos ahora al estudio de la separabilidad de los espacios de funciones esencialmente acotadas. Vamos a empezar con un resultado que contrasta con la situación presentada en el corolario 1 de la sección anterior.

Teorema 6 *El espacio de funciones esencialmente acotadas $L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), \lambda_n, \mathbb{K})$ no es separable. Este resultado se mantiene si el conjunto de base es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Tratamos únicamente el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Como el espacio L^∞ posee una estructura de espacio de Banach, vamos a utilizar la proposición 4 para mostrar que no existe un subconjunto denso y numerable de $L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), \lambda_n, \mathbb{R})$. Para todo punto $a \in \mathbb{R}^n$ definimos la función $\varphi_a(x) = \mathbb{1}_{B(a,1)}(x)$ y el conjunto

$$A_a = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), \lambda_n, \mathbb{R}) : \ \|f - \varphi_a\|_{L^\infty} < 1/2\}.$$

Vemos entonces que para todo $a \in \mathbb{R}^n$ el conjunto A_a es un abierto no vacío de $L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), \lambda_n, \mathbb{R})$ y que si $a \neq b$ entonces $A_a \cap A_b = \emptyset$. Como $\mathbb{R}^n$ no es numerable podemos aplicar la proposición 4 para obtener que este espacio no es separable.

Para la segunda aserción hacemos una pequeña modificación del razonamiento anterior. Sea pues X un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y estudiemos la separabilidad del espacio $L^\infty(X)$. Para todo punto $a \in X$ fijamos un real r_a tal que $r_a < d(a, X^c)$ en donde $d(a, X^c)$ es la distancia entre el punto a y el complementario de X. La función φ_a está entonces definida por $\varphi_a(x) = \mathbb{1}_{B(a,r_a)}(x)$ y repetimos los mismos argumentos utilizados en las líneas precedentes: definimos similarmente los conjuntos A_a y como X es no numerable podemos concluir.

■

Este resultado es importante pues muestra que en el caso más utilizado en la práctica, es decir cuando X es el espacio euclídeo o algún subconjunto abierto, los espacios de funciones esencialmente acotadas L^∞ poseen propiedades topológicas distintas a las de los otros espacios de Lebesgue L^p con $1 \leq p < +\infty$.

El resultado a continuación presenta condiciones de separabilidad para el espacio L^∞.

Teorema 7 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Entonces las proposiciones siguientes son equivalentes:*

1) *el espacio $L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ es separable*

2) *no existe una familia infinita $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de partes $\mathscr{A}$-medibles de X de medida no nula, dos a dos disjunta.*

3) *el espacio $L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ es de dimensión finita*

4) *toda función $\mathscr{A}$-medible pertenece al espacio $L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$.*

2. Espacios Locales

2.1. Definiciones y primeras propiedades

Definición 8 (Espacios L^p_{loc} y L^∞_{loc}) *Sea $1 \leq p < +\infty$ un real y sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido regular. Definimos el espacio de clases de funciones localmente de potencia p-eme integrables, notado $L^p_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ o más sencillamente $L^p_{loc}(X)$, como el conjunto de funciones $\mathscr{A}$-medibles*

$$L^p_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) = \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{K} : \ \|f\|_{L^p(K)} = \left(\int_K |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} < +\infty, \ \forall K \subset X \, compacto \right\}$$

El espacio de clases de funciones localmente esencialmente acotadas $L^\infty_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ estará definido en cambio de la siguiente manera:

$$L^\infty_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) = \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{K} : \ \|f\|_{L^\infty(K)} = \sup_{x\in K} ess |f(x)| < +\infty, \ \forall K \subset X \, compacto \right\}$$

Es muy importante observar que las funcionales que caracterizan estos conjuntos dependen del compacto que entra en consideración y es por eso que notamos $\| \cdot \|_{L^p(K)}$ y $\| \cdot \|_{L^\infty(K)}$ para insistir en esta dependencia.

Notación: Si $f \in L^1_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ diremos simplemente que f es *localmente integrable.*

El ejemplo clásico de una función localmente integrable está dado por $f(x) = 1/x$ para todo $x \in]0, +\infty[$. El lector no tendrá dificultad en verificar que para todo compacto $K \subset]0, +\infty[$ se tiene $\|f\|_{L^1(K)} = \int_K 1/x dx < +\infty$, pero que $f \notin L^1(]0, +\infty[)$.

Si $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio medido regular y si $f, g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ son dos funciones localmente de potencia p-eme integrables con $1 \leq p < +\infty$, se tiene que $f + g \in L^p_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$: para todo compacto K basta aplicar la desigualdad de Minkowski para obtener $\|f + g\|_{L^p(K)} \leq \|f\|_{L^p(K)} + \|g\|_{L^p(K)} < +\infty$. De la misma forma si $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene sin mayor problema que $\lambda f \in L^p_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Dado que los razonamientos son los mismos si $f, g \in L^\infty_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, hemos verificado el resultado siguiente:

Proposición 7 *Si $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio medido regular entonces para todo $1 \leq p < +\infty$ el espacio $L^p_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y el espacio $L^\infty_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ son subespacios vectoriales del conjunto de funciones medibles $\mathcal{M}(X, \mathscr{A}, \mathbb{K})$.*

2.2. Estructura de los espacios locales

Por las hipótesis que hemos realizado sobre el conjunto X y el espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$, tenemos que el espacio X es σ-compacto y que la medida μ es finita sobre los compactos. Estas propiedades nos proporcionan una sucesión numerable de conjuntos compactos de medida finita $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que será fijada de una vez por todas, tales que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

A partir de estos hechos, podemos ver que si $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ es una función tal que para todo compacto K_n de la sucesión $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se tiene $\|f\|_{L^p(K_n)} = 0$ entonces $f = 0$ en μ-casi todas partes y esta propiedad se mantiene si consideramos $\|\cdot\|_{L^\infty(K_n)}$. Esto significa que las familias de semi-normas $(\|\cdot\|_{L^p(K_n)})_{n\in\mathbb{K}}$ y $(\|\cdot\|_{L^\infty(K_n)})_{n\in\mathbb{K}}$ verifican el axioma de separación (ver definición 1.3.6 del folleto), lo que nos permitirá dotar a los espacios L^p_{loc} y L^∞_{loc} de una estructura de espacio topológico separado. Más precisamente tenemos el resultado siguiente:

Teorema 8 *Si X es un espacio topológico separado localmente compacto a base numerable y si el espacio $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio medido σ-finito regular, entonces los espacios $L^p_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ con $1 \leq p < +\infty$ y $L^\infty_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ son espacios de Fréchet.*

Demostración. Hemos visto con las observaciones de las líneas precedentes que las familias de semi-normas $(\|\cdot\|_{L^p(K_n)})_{n\in\mathbb{K}}$ y $(\|\cdot\|_{L^\infty(K_n)})_{n\in\mathbb{K}}$ verifican el axioma de separación y entonces por el teorema 1.3.2 del folleto tenemos que los espacios $(L^p_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}), (\|\cdot\|_{L^p(K_n)})_{n\in\mathbb{K}})$ y $(L^\infty_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}), (\|\cdot\|_{L^\infty(K_n)})_{n\in\mathbb{K}})$ son espacios métricos.

Debemos ahora verificar que estos espacios son completos. Para ello utilizamos la proposición 1.3.6 que permite restringir nuestra atención a los semi-normas que determinan estos espacios. Sea entonces $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy del espacio $L^p_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Fijemos un compacto K_{n_0} de la sucesión de compactos $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que recubre X. Dado que $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es también una sucesión de Cauchy del espacio completo $L^p(K_{n_0}, \mathscr{A}_{|K_{n_0}}, \mu_{|K_{n_0}}, \mathbb{K})$ tenemos que, sobre este compacto K_{n_0} que $f_j \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} f_{K_{n_0}} \in L^p(K_{n_0}, \mathscr{A}_{|K_{n_0}}, \mu_{|K_{n_0}}, \mathbb{K})$. Sea K_{n_1} otro compacto de la sucesión $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $K_{n_0} \cap K_{n_1} = A$, definimos de forma similar la función $f_{K_{n_1}\setminus A}$ como el límite de la sucesión de Cauchy $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sobre $K_{n_1} \setminus A$ y construimos una función sobre $K_{n_0} \cup K_{n_1}$ escribiendo $f_{K_{n_0}\cup K_{n_1}} = f_{K_{n_0}} + f_{K_{n_1}\setminus A}$.

De esta manera obtenemos una función definida sobre $K_{n_0} \cup K_{n_1}$ que corresponde al límite de la sucesión $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Repitiendo este procedimiento para todo compacto de la sucesión $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se obtiene una función localmente de potencia p-eme integrable f definida sobre X a valores en $\mathbb{K}$ que es el límite, sobre todo compacto K_n y para toda semi-norma asociada, de la sucesión de Cauchy $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$; lo que demuestra que este espacio es completo. El caso del espacio $L^\infty_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ se trata de forma totalmente similar, de manera que podemos dar por terminada la demostración del teorema.

$\blacksquare$

Observación 4 Los espacios $L^p_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y $L^\infty_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ son espacios métricos completos y si bien no hemos explicitado sus respectivas métricas en la demostración del teorema anterior, conviene escribir su formulación. Sea pues $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = X$ una sucesión de compactos y sean f, g dos funciones de $L^p_{loc}(X)$ con $1 \leq p \leq +\infty$, entonces la expresión

$$d(f, g) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\inf\{\|f - g\|_{L^p(K_n)}; 2^{-n}\}\}$$

es una distancia sobre el espacio $L^p_{loc}(X)$.

Observación 5 En estas líneas hemos trabajado con una sucesión de compactos $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ y es importante notar que la estructura de los espacios L^p_{loc} es independiente de la sucesión de compactos escogida: si fijamos otra sucesión $(\tilde{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{K}_n$, las propiedades expuestas se mantienen y es equivalente trabajar con una u otra sucesión de compactos.

2.3. Relaciones de inclusión

Teorema 9 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido regular y sean p, q dos reales tales que $1 < p < q < +\infty$. Tenemos entonces las inclusiones estrictas siguientes entre los espacios locales:*

$$L^\infty_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \subsetneq \cdots \subsetneq L^q_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \subsetneq L^p_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \subsetneq \cdots \subsetneq L^1_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$$

Demostración. Sean $1 < p < q < +\infty$ dos reales y sea f una función que pertenece al espacio $L^q_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Dado que se tiene para todo compacto K, que es de medida finita puesto que el espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es regular, la estimación

$$\|f\|_{L^p(K)} \leq \mu(K)^{1/p-1/q} \|f\|_{L^q(K)}$$

podemos deducir que $f \in L^p_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. El lector verificará que estas inclusiones son estrictas. Los casos límite 1 y $+\infty$ se tratan de la misma manera.

■

Proposición 8 *Bajo las mismas hipótesis que las del teorema 9 tenemos para todo real* $1 \leq p \leq +\infty$ *la inclusión estricta de espacios* $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \subsetneq L^p_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$.

Prueba. Debemos mostrar que toda función que pertenece al espacio $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ es en realidad localmente de potencia p-eme integrable. Este resultado se deduce muy fácilmente de la estimación elemental

$$\|f\|^p_{L^p(K)} = \int_K |f(x)|^p d\mu(x) \leq \int_X |f(x)|^p d\mu(x) = \|f\|^p_{L^p}$$

válida para toda función $f \in L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y todo subconjunto compacto de X. La comprobación de que esta inclusión es estricta es dejada en ejercicio.

■

Corolario 2 *Sea* $1 < p \leq +\infty$ *un real. Entonces* todos *los espacios de Lebesgue* $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ *están contenidos en el espacio* $L^1_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$

Prueba. Para la verificación de este resultado es suficiente juntar la proposición 8 y el teorema 9. En efecto, por esta proposición tenemos para todo $1 < p \leq +\infty$ la inclusión $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \subset L^p_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, mientras que por el teorema 9 tenemos $L^p_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \subset L^1_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ de donde se obtiene la inclusión deseada.

■

Este último resultado es importante, pues si bien en el caso general no existe ninguna relación de inclusión entre los diferentes espacios de Lebesgue, tenemos que todos estos espacios están siempre contenidos en el espacio de funciones localmente integrables $L^1_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$.