Irracionalidad 30/09/2011

El objetivo de estos tres ejercicios es el de estudiar la *irracionalidad* de algunos números usuales como $\sqrt{2}$, e y π. Vamos a demostrar que estos números no se pueden escribir como un cociente de dos números enteros.

Ejercicio 1 — Irracionalidad de $\sqrt{2}$

Vamos a demostrar en este ejercicio que $\sqrt{2}$ no es un número racional. Para ello vamos a proceder por el absurdo y vamos a suponer que $\sqrt{2}$ es un número racional, es decir que se puede escribir de la forma $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{N}$ dos números que podemos suponer primos entre sí.

1. **Mostrar que $2b^2 = a^2$.**

   Dado que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, al elevar el cuadrado esta identidad se obtiene $2b^2 = a^2$.

2. **Deducir que a y que b son dos números pares.**

   Dado que $2b^2 = a^2$, se tiene que a^2 es un número par. Observamos ahora que:
   - si a es par, entonces a^2 es par
   - si a es impar, entonces a^2 es impar

   de manera que a^2 es par si y solo si a es par y podemos escribir $a = 2m$ con $m \in \mathbb{N}$.

   Ahora como se tiene $a = 2m$, obtenemos $a^2 = 2^2m^2$ lo que nos permite afirmar que b^2 es un número par y entonces b también es un número par que se puede escribir $b = 2n$ con $n \in \mathbb{N}$.

3. **Explicitar la contradicción necesaria para el fin de la demostración.**

   Habíamos supuesto que a y b eran primos entre sí, pero por los puntos anteriores tenemos que $a = 2m$ y $b = 2n$ lo cual es una contradicción a esta hipótesis. Con esto hemos demsotrado que $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Ejercicio 2 — Irracionalidad de e

El número e es de gran importancia en las matemáticas y está dado por la fórmula

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

1. **Mostrar que e se puede escribir de la forma $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + R_n$ en donde R_n es un *resto* cuya expresión se explicitará.**

   Basta escribir

   $$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + R_n$$

   con $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

2. **Verificar que se tiene la estimación**

   $$R_n < \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots\right)$$

y deducir que $R_n < \dfrac{2}{(n+1)!}$**.**

Por definición tenemos

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!(n+2)} + \frac{1}{(n+1)!(n+2)(n+3)} + \cdots \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right) < \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots\right) \end{aligned}$$

Dado que se tiene $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2$, se obtiene la desigualdad deseada.

3. **Mostrar por recurrencia que** $\alpha_n = n!\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ **es un entero.**

   (i) se tiene $\alpha_1 = 1$ que es un entero,

   (ii) hacemos la hipótesis que α_n es un entero,

   (iii) mostremos que α_{n+1} es un entero: para ello escribimos

   $$\alpha_{n+1} = (n+1)!\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} = (n+1)!\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!}\right) = (n+1)\left(n!\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) + 1 = (n+1)\alpha_n + 1.$$

   Por hipótesis de recurrencia se tiene que α_n es un entero, de donde se deduce que α_{n+1} es un entero.

4. **Verificar que se tiene la estimación**

$$0 < n!\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) < \frac{2}{n+1} \qquad (1)$$

Vemos que $n!\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) = n!R_n$, por lo tanto, por la pregunta 2) se tiene que $0 < n!R_n < \frac{2}{n+1}$.

5. **Procedemos ahora por el absurdo y suponemos que** e **puede escribirse como un cociente de dos enteros, es decir que se tiene** $e = \frac{a}{b}$ **con** $a, b \in \mathbb{N}$**. Utilizando esta información y la estimación (1) obtener la fórmula siguiente:**

$$0 < n!a - b\alpha_n < \frac{2b}{n+1}$$

Reemplazando e por $\frac{a}{b}$ en (1) se obtiene

$$0 < n!\frac{a}{b} - n!\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{2}{n+1}$$

Usamos la definición de α_n para obtener

$$0 < n!a - b\alpha_n < \frac{2b}{n+1}.$$

6. **¿A qué conjunto pertenece el número** $n!a - b\alpha_n$**? ¿qué sucede con este número si** $n \to +\infty$**? Obtener con estas preguntas la contradicción buscada y deducir que** e **no es un número racional.**

Sabemos que a, b y α_n son enteros, de manera que $\gamma_n = n!a - b\alpha_n$ es también es un entero. Nótese en particular que por construcción este entero γ_n nunca es nulo.
Pero por la estimación obtenida en la pregunta 5), cuando $n \to +\infty$ se tiene que γ_n tiende a cero. Esto es imposible pues todo entero no nulo tiene un valor absoluto mayor o igual a 1. Obtenemos así la contradicción deseada y concluímos que e no es un número racional.

Ejercicio 3 — Irracionalidad de π

1. **Dado el polinomio**
$$P(x) = c_{2n}x^{2n} + c_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + c_2x^2 + c_1x + c_0.$$
Sea $F(x) = P(x) - P''(x) + \cdots + (-1)^n P^{(2n)}(x)$. Mostrar que se tiene la identidad
$$P(x)\sin(x) = \big[F'(x)\sin(x) - F(x)\cos(x)\big]'$$
y deducir la fórmula de Hermite $\displaystyle\int_0^\pi P(x)\sin(x)dx = F(0) + F(\pi)$.

Observamos que $[F'(x)\sin(x) - F(x)\cos(x)]' = (F(x) + F''(x))\sin(x)$; de manera que lo único que hay que verificar es la identidad $P(x) = F(x) + F''(x)$. Para ello observamos que
$$F''(x) = P''(x) - P^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^{n-1}P^{(2n)}(x)$$
de manera que, por construcción, se obtiene que $F(x) + F''(x) = P(x)$, de donde se deduce la identidad deseada. Con esta identidad tenemos
$$\int_0^\pi P(x)\sin(x)dx = F(0) + F(\pi).$$

2. **Vamos a proceder por el absurdo suponiendo que π se puede expresar como el cociente de dos enteros a y b; es decir $\pi = \frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{N}$. Con estos números a y b fijados, definimos ahora el polinomio**
$$P(x) = \frac{1}{n!}x^n(a - bx)^n \tag{2}$$
y notaremos $I_n = \displaystyle\int_0^\pi P(x)\sin(x)dx$. Verificar que $I_n > 0$.

Vemos primero que $\sin(x) > 0$ sobre $[0, \pi]$, además si se tiene que $\pi = \frac{a}{b}$, vemos que $P(x) > 0$ para todo $x \in [0, \pi]$. Con estas dos observaciones tenemos que $P(x)\sin(x) > 0$ sobre el intervalo de integración y por lo tanto se tiene $I_n > 0$.

3. **Mostrar que para todo $x \in [0, \pi]$ se tiene la desigualdad $x(a - bx) \leq \frac{a^2}{4b}$ y obtener la estimación**
$$I_n \leq \frac{1}{n!}\pi\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n. \tag{3}$$

Vemos para empezar que $x(a - bx) \leq \frac{a^2}{4b} \iff 0 \leq x^2 - \frac{a}{b}x + \frac{a^2}{4b^2}$. Dado que $x \in [0, \pi]$ y que hemos supuesto que $\pi = \frac{a}{b}$, se tiene directamente, calculando las raíces del polinomio $x^2 - \frac{a}{b}x + \frac{a^2}{4b^2}$, que $x(a - bx) \leq \frac{a^2}{4b}$.

Tenemos entonces $\frac{1}{n!}x^n(a - bx)^n \leq \frac{1}{n!}\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n$; de manera que
$$I_n = \int_0^\pi P(x)\sin(x)dx \leq \int_0^\pi \frac{1}{n!}\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n dx = \frac{1}{n!}\pi\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n.$$

4. **Con la definición del polinomio (2), verificar que $F(0)$ y $F(\pi)$ son dos enteros relativos. Junto con la fórmula de Hermite deducir que $I_n \in \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.**

Tenemos por construcción del polinomio (2) y por definición del polinomio $F(x)$ que $F(0)$ siempre es un entero. En efecto, observamos que $P(0) = P'(0) = P^{(n-1)}(0) = 0$, y las derivadas siguientes son potencias de a multiplicadas por coeficientes enteros.
Por un razonamiento similar, puesto que $\pi = \frac{a}{b}$ se obtiene que $F(\pi)$ es un entero.

Finalmente, por la fórmula de Hermite, se tiene que $I_n = F(0) + F(\pi)$. Por la pregunta 2) se tiene que $I_n > 0$ de manera que se obtiene que $I_n \in \mathbb{N}$.

5. **Utilizando la estimación (3) y la pregunta anterior, obtener una contradicción y deducir que π no es un número racional.**

   Tenemos pues que I_n es una sucesión de enteros positivos, por la estimación (3) esta sucesión de enteros tiende a cero si $n \to +\infty$ lo cual es imposible. Obtenemos de esta manera la contradicción buscada y deducimos que π no es un número racional.