**<u>Irracionalidad</u>** 30/09/2011

El objetivo de estos tres ejercicios es el de estudiar la *irracionalidad* de algunos números usuales como $\sqrt{2}$, $e$ y $\pi$. Vamos a demostrar que estos números no se pueden escribir como un cociente de dos números enteros.

## Ejercicio 1 — Irracionalidad de $\sqrt{2}$

Vamos a demostrar en este ejercicio que $\sqrt{2}$ no es un número racional. Para ello vamos a proceder por el absurdo y vamos a suponer que $\sqrt{2}$ es un número racional, es decir que se puede escribir de la forma $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{N}$ dos números que podemos suponer primos entre sí (es decir que ni $a$ divide $b$, ni $b$ divide $a$).

1. Mostrar que $2b^2 = a^2$.
2. Deducir que $a$ y que $b$ son dos números pares.
3. Explicitar la contradicción necesaria para el fin de la demostración.

## Ejercicio 2 — Irracionalidad de $e$

El número $e$ es de gran importancia en las matemáticas y está dado por la fórmula

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

1. Mostrar que $e$ se puede escribir de la forma $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + R_n$ en donde $R_n$ es un *resto* cuya expresión se explicitará.
2. Verificar que se tiene la estimación
$$R_n < \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots\right)$$
y deducir que $R_n < \dfrac{2}{(n+1)!}$.
3. Mostrar por recurrencia que $\alpha_n = n!\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ es un entero.
4. Verificar que se tiene la estimación
$$0 < n!\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) < \frac{2}{n+1} \tag{1}$$
5. Procedemos ahora por el absurdo y suponemos que $e$ puede escribirse como un cociente de dos enteros, es decir que se tiene $e = \frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{N}$. Utilizando esta información y la estimación (1) obtener la fórmula siguiente:
$$0 < n!a - b\alpha_n < \frac{2b}{n+1}$$
6. ¿A qué conjunto pertenece el número $n!a - b\alpha_n$? ¿qué sucede con este número si $n \to +\infty$? Obtener con estas preguntas la contradicción buscada y deducir que $e$ no es un número racional.

## Ejercicio 3 — Irracionalidad de $\pi$

1. Dado un polinomio

$$P(x) = c_{2n}x^{2n} + c_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + c_2x^2 + c_1x + c_0, \qquad \text{de grado } 2n.$$

Sea $F(x) = P(x) - P''(x) + \cdots + (-1)^n P^{(2n)}(x)$. Mostrar que se tiene la identidad

$$P(x)\sin(x) = \big[F'(x)\sin(x) - F(x)\cos(x)\big]'$$

y deducir la fórmula de Hermite $\displaystyle\int_0^\pi P(x)\sin(x)dx = F(0) + F(\pi)$.

2. Vamos a proceder por el absurdo suponiendo que $\pi$ se puede expresar como el cociente de dos enteros $a$ y $b$; es decir $\pi = \frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{N}$. Con estos números $a$ y $b$ fijados, definimos ahora el polinomio

$$P(x) = \frac{1}{n!}x^n(a - bx)^n \tag{2}$$

y notaremos $\displaystyle I_n = \int_0^\pi P(x)\sin(x)dx$.

Verificar que $I_n > 0$ .

3. Mostrar que para todo $x \in [0, \pi]$ se tiene la desigualdad $x(a - bx) \leq \frac{a^2}{4b}$ y obtener la estimación

$$I_n \leq \frac{1}{n!}\pi\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n. \tag{3}$$

4. Con la definición del polinomio (2), verificar que $F(0)$ y $F(\pi)$ son dos enteros relativos. Junto con la fórmula de Hermite deducir que $I_n \in \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

5. Utilizando la estimación (3) y la pregunta anterior, obtener una contradicción y deducir que $\pi$ no es un número racional.