**Grupos y subgrupos** 19/07/2011

## Ejercicio 1 — Propiedades a la derecha

Sea $G$ un conjunto dotado de una operación asociativa tal que:

*i)* $G$ admite un elemento *neutro a la derecha* $e$, es decir tal que $ae = a$ para todo $a \in G$,

*ii)* $G$ admite *inversos a la derecha*, es decir, para todo elemento $a \in G$, existe un elemento $a' \in G$ tal que $aa' = e$.

Demuestre que:

1. La *ley de simplificación a la derecha* es válida, es decir que para todos $a, b, c \in G$, si $ac = bc$ entonces $a = b$.
2. $e$ es *neutro a la izquierda*, es decir que $ea = a$ para todo $a \in G$.
3. $G$ es un grupo.

## Ejercicio 2 — Partes

Sea $E$ un conjunto, y $G$ un grupo.

1. Demuestre que el conjunto de las partes de $E$, $\mathcal{P}(E)$ con la operación *diferencia simétrica* es un grupo abeliano.
2. Demuestre que el conjunto de aplicaciones de $E$ hacia $G$, denotado por $G^E$ es un grupo para una operación inducida por la operación de $G$. En particular, muestre que $G^E$ es abeliano si $G$ lo es.
3. Demuestre que el grupo $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^E$ es isomorfo a $\mathcal{P}(E)$.

## * Ejercicio 3 — Semi-cuerpos

Un *semi-cuerpo* es el dato de una terna $(\mathbb{P}, \cdot, \oplus)$ donde $(\mathbb{P}, \cdot)$ es un grupo abeliano, y $\oplus$ es una operación interna en $\mathbb{P}$ que para todos $a, b, c \in \mathbb{P}$ se cumple:

*i)* $a \oplus b = b \oplus a$,

*ii)* $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$,

*iii)* $a \cdot (b \oplus c) = a \cdot b \oplus a \cdot c$.

Si $(\mathbb{P}, \cdot, \oplus)$ es un semicuerpo, demuestre que el grupo abeliano $(P, \cdot)$ no tiene torsión.

## Ejercicio 4 — Matrices y complejos

Sea $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}] = \{a + b\sqrt{-3} |\ a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + 3b^2 \neq 0\}$

1. Mostrar que $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ es un grupo para la multiplicación de los números complejos.
2. Mostrar que $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ es isomorfo a $\left\{ \begin{pmatrix} a & b\sqrt{3} \\ -b\sqrt{3} & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + 3b^2 \neq 0 \right\}$

## Ejercicio 5 — Congruencias módulo un subgrupo

Sea $G$ un grupo y $S \subseteq G$ un subconjunto de $G$.

1. Se define la relación $\sim_S$ en $G$ mediante $x \sim_S y$ si y solamente si $xy^{-1} \in S$. Demuestre que $\sim_S$ es una equivalencia si y solamente si es que $S$ es un subgrupo de $G$.
2. Se define la relación $\approx_S$ en $G$ mediante $x \approx_S y$ si y solamente si $x^{-1}y \in S$. Demuestre que $\approx_S$ es una equivalencia si y solamente si es que $S$ es un subgrupo de $G$.
3. Dé un ejemplo de un grupo $G$ y un subgrupo $S$ tales que $\sim_S$ y $\approx_S$ no coincidan.

## Ejercicio 6 — Transformaciones afines de $\mathbb{R}$

Para $a \in \mathbb{R}_*,\ b \in \mathbb{R}$ se define $\alpha_{a,b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante la fórmula $\alpha_{a,b}(x) = ax+b$. Sea $\mathcal{A} = \{\alpha_{a,b} | a \in \mathbb{R}_*,\ b \in \mathbb{R}\}$ el conjunto de aplicaciones afines de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

1. Demuestre que $\mathcal{A}$ es un grupo para la composición de aplicaciones.
2. Sean $\mathcal{H} = \{\alpha_{a,b} \in \mathcal{A} | b = 0\}$ el conjunto de las *homotecias*, y $\mathcal{T} = \{\alpha_{a,b} \in \mathcal{A} | a = 1\}$ el conjunto de las *translaciones*. Demuestre que $\mathcal{H}$ y $\mathcal{T}$ son subgrupos de $\mathcal{A}$.
3. Determine si se trata de subgrupos normales.