Subgrupos y ordenes

19/07/2011

Ejercicio 1 — Propiedades de $\langle ? \rangle$

Sean X e Y dos partes de un grupo G. Demuestre que:

1. Si $X \subseteq Y$ entonces $\langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$.
2. $\langle X \cup Y \rangle = \langle \langle X \rangle \cup \langle Y \rangle \rangle$.
3. $\langle X \cap T \rangle \subseteq \langle X \rangle \cap \langle Y \rangle$, y dé un ejemplo en el que la inclusión sea estricta.
4. $\langle \langle X \rangle \rangle = \langle X \rangle$.

Ejercicio 2 — Generadores de $\mathfrak{S}_n$

Demuestre que:

1. $\mathfrak{S}_n = \langle (1\ 2),\ (1\ 3), \ldots, (1\ n) \rangle$.
2. $\mathfrak{S}_n = \langle (1\ 2),\ (1\ 2\ 3\ \cdots\ n) \rangle$.

Ejercicio 3 — Centralizador y normalizador

Sea G un grupo y $A \subseteq G$ un subconjunto de G (no necesariamente un subgrupo).

1. El *centralizador de A en G* se define como $C_G(A) = \{g \in G |\ gag^{-1} = a,\ \forall a \in G\}$. Muestre que $C_G(A)$ es un subgrupo de G.
2. El *normalizador de A en G* se define como $N_G(A) = \{g \in G |\ gAg^{-1} \subseteq A\}$. Muestre que $N_G(A)$ es un subgrupo de G.
3. Determine $N_{\mathbb{D}_4}(\{\epsilon, \alpha\})$ y $N_{\mathbb{D}_4}(\{\rho\})$.
4. Si G es abeliano, y $A \subseteq G$ es cualquier subconjunto no vacío, muestre que $N_G(A) = C_G(A) = G$.
5. Si $H \leq G$ es un subgrupo, muestre que $H \leq N_G(H)$, y que de hecho se tiene $H \trianglelefteq N_G(H)$.
6. ¿Alguna idea de por qué se llaman el centralizador y el normalizador?

Ejercicio 4 — Estabilizador en $\mathfrak{S}_n$

Sea X un subconjunto de $\{1, 2 \ldots n\}$. Definamos $\mathsf{Stab}(X) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n | \sigma(X) \subseteq X\}$, el *estabilizador* de X en $\mathfrak{S}_n$.

1. Demuestre que $\mathsf{Stab}(X) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n | \sigma(X) = X\}$.
2. Calcule $\mathsf{Stab}(X)$ en el caso en que $n = 5$, y $X = \{1, 2\}$.
3. Demuestre que $\mathsf{Stab}(X)$ es un subgrupo de $\mathfrak{S}_n$.
4. Calcule $|\mathsf{Stab}(X)|$ en función de n y de $|X|$.

Ejercicio 5 — Endomorfismos

Sea G un grupo.

1. Sea $f : G \longrightarrow G$ definida por $f(x) = x^{-1}$. Demuestre que f es un endomorfismo de G si y solamente si es que G es abeliano.

2. Sea $g : G \longrightarrow G$ definida por $g(x) = x^2$. Demuestre que g es un endomorfismo de G si y solamente si es que G es abeliano.

* Ejercicio 6 — Ordenes finitos

Sean G un grupo, y $a, b \in G$.

1. Demuestre que a es de orden finito si y solamente si a^{-1} lo es, y que en ese caso se tiene que $o(a) = o(a^{-1})$.

2. Demuestre que a es de orden finito si y solamente si es que $b^{-1}ab$ lo es, y que en ese caso se tiene que $o(a) = o(b^{-1}ab)$.

3. Demuestre que a es de orden finito si y solamente si es que a^k es de orden finito para todo $k \in \mathbb{Z}_*$, y que en ese caso se tiene que:
$$o(a^k) = \frac{[o(a), k]}{k} = \frac{o(a)}{(o(a), k)}$$

4. Deduzca de lo anterior que si $|G| = n$, y a genera G, entonces se tiene que a^k genera G si y solamente si es que $(k, n) = 1$.

5. Demostrar que si a y b son ambos de orden finito tales que $ab = ba$, entonces ba es de orden finito y $o(ba) \mid [o(a), o(b)]$. De un ejemplo de elementos a, b de un grupo G tales que $ab = ba$ pero $o(ba) < [o(a), o(b)]$.

6. Demuestre que si a y b son de orden finito, tales que $ab = ba$ y $(o(a), o(b)) = 1$, entonces $o(ab) = [o(a), o(b)] = o(a)o(b)$.