Aplicaciones Lineales, núcleos e imágenes. 15/05/2010

Ejercicio 1 — Recurrencia

Sean E, F dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo de escalares $\mathbb{K}$ y sea $f \in \mathscr{L}(E, F)$ una aplicación lineal de E en F.

1. Mostrar que se tiene para todo $n \in \mathbb{N}^*$, para todo $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ y todo $(x_1, ..., x_n) \in E^n$ la identidad

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

2. Deducir a partir de este resultado la proposición siguiente:

"*Sean E, F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita. Sea $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ una base de E, sea $f \in \mathscr{L}(E, F)$ y sea $x \in E$ y sean $(x_1, ..., x_n)$ labs componentes de x en la base $\mathcal{B}$ (es decir $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$). Entonces se tiene $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$.*"

Esto quiere decir que una aplicación lineal está totalmente determinada por las imágenes de los vectores de una base.

Ejercicio 2 — Núcleos

Sean E, F dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo de escalares $\mathbb{K}$. Sea $f \in \mathscr{L}(E, F)$ una aplicación lineal de E en F. Sean finalmente $A, B \subset E$ dos subespacios vectoriales de E.

Mostrar que se tiene la equivalencia siguiente:

$$f(A) \subset f(B) \iff A + Ker(f) \subset B + Ker(f)$$

Ejercicio 3 — Núcleos e Imágenes

1. Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $f, g \in \mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E, E)$ dos aplicaciones lineales tales que $f \circ g = g \circ f$. Mostrar que $Ker(f)$ y $Im(f)$ son estables por g.
2. Sean E, F, G tres $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ y $g \in \mathscr{L}(F, G)$. Mostrar:

   a) $Ker(g \circ f) = f^{-1}(Ker(g))$

   b) $Ker(g \circ f) \supset (Ker(f))$

   c) $Im(g \circ f) = g(Ker(f))$

   d) $Im(g \circ f) \subset Im(g)$

Ejercicio 4 — Nilpotencia

Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $E \neq \{0\}$. Sea $f \in \mathscr{L}(E)$ una aplicación lineal nilpotente de grado p: es decir $f^p = 0$ pero $f^{p-1} \neq 0$. Mostrar que la familia $(Id_E, f, f^2, ..., f^{p-1})$ es una familia libre.

Ejercicio 5 — Rango

1. Sean E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, $\lambda \in \mathbb{K}$ y $f \in \mathscr{L}(E)$. Calcular el rango $rg(\lambda)$ en función del rango $rg(f)$.
2. Sean E, F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita.
   a) si $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$, mostrar que se tienen las desigualdades:

   $$|rg(f) - rg(g)| \leq rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g)$$

   b) si $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$ son tales que $fg = 0$ y $f + g$ es inversible, mostrar que $rg(f) + rg(g) = dim(E)$.

Ejercicio 6 — Equivalencia

Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f \in \mathscr{L}(E)$. Mostrar la equivalencia

$$E = Im(f) \oplus Ker(f) \iff Im(f) = Im(f^2)$$

Ejercicio 7 — Dualidad

Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3, sea (e_1, e_2, e_3) una base de E y sean f_1^*, f_2^*, f_3^* tres elementos del dual E^* determinados por

$$f_1^* = 2e_1^* + e_2^* + e_3^*, \quad f_2^* = -e_1^* + 2e_3^*, \qquad f_3^* = e_1^* + 3e_2^*$$

Mostrar que $\mathcal{B}^* = (f_1^*, f_2^*, f_3^*)$ es una base dual de E^* y determinar la base $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ de E tal que se tenga $(\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*$.