Lección n°1: Asociadores de Drinfel'd

USFQ, noviembre 2015

Índice

Introducción

La teoría de los asociadores de Drinfel'd fue introducida por el matemático ucraniano Vladimir Drinfel'd[1] en su famoso artículo [Dri91] y es un ejemplo de objeto que las matemáticas toman «prestado» a la física, cuya importancia matemática termina siendo independiente de su importancia física.

En particular las ideas[2] siguientes:

- Teoría de grupos cuánticos (Drinfel'd);

  → Los asociadores producen cuantizaciones de bi-álgebras de Lie.

- Teoría conforme de campos (Witten[3]);

  → La conexión KZ aparece naturalmente en la cuantización geométrica de la teoría de Chern-Simons en 3 dimensiones.

- Teoría de nudos e invariantes topológicos de variedades de tres dimensiones (Witten, Kontsevich[4]);

  → El álgebra universal envolvente del álgebra de Lie de holonomía del espacio de configuraciones del plano complejo, que es donde la conexión KZ está definida, es precisamente el álgebra de diagramas de cuerdas horizontales.

sirvieron para responder problemas profundos en:

- Teoría de números (Drinfeld, ver [Dri91]);

  → El asociador KZ es una serie generadora de todos los valores multizeta.

- Teoría geométrica de Galois (Grothendieck[5]-Drinfel'd, ver [Dri91] y [Gro97]);

  → El conjunto de asociadores es un torsor bajo la acción de un grupo cuya versión profinita contiene el grupo de Galois absoluto $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

[1] Medallista Fields en 1990.
[2] Lista no exhaustiva, así como la de autores citados con contribuciones mayores en la teoría de los asociadores de Drinfel'd.
[3] Medallista Fields en 1990, ver en particular su artículo [Wit89].
[4] Medallista Fields en 1998, ver en particular su artículo [Kon99].
[5] Medallista Fields en 1966, ver en particular su manustrito « Esquisse d'un Programme » [Gro97].

- Cuantización por deformación y formalidad (Kontsevich, Tamarkin, ver [Kon99]).

  → Proveerse un asociador de Drinfel'd es equivalente a proveerse de una cuantización por deformación universal (i.e. de un «producto estrella» universal) en el espacio de «observables» de una variedad de Poisson. Cada asociador produce un morfismo de formalidad de la operada de pequeños discos.

Inicialmente, Drinfel'd buscaba «universalizar» la construcción asociada a la monodromía de un sistema de ecuaciones diferenciales con variables no conmutativas venidas de la física de altas energias y demostró que, no sólo los asociadores sobre $\mathbb{C}$ y sobre $\mathbb{Q}$ existen, sino que su existencia mobiliza la teoría de un misterioso grupo, el grupo de Grothendieck-Teichmüller (en particular su versión $\mathbf{k}$-pro-unipotente), cuya existencia había sido prevista por Alexander Grothendieck en [Gro97] (ver también [Del89]). Este grupo (y sus diferentes compleciones) es muy importante porque actúa en varios sectores de las matemáticas (ver por ejemplo [DM69] y [BFL99]). El estudio de las acciones de este grupo es materia de investigación actual[6].

Desarrollo del curso.

El curso será dividido en tres partes, conforme aumenta el nivel de dificultad de la materia en términos de requisitos.

En la primera parte haremos un recordatorio sobre las herramientas básicas en teoría de álgebras de Lie que serán usadas, tomando como ejemplo el álgebra de Lie de Kohno-Drinfel'd $\mathfrak{t}_n$ que será usada extensivamente en todo el minicurso. El objetivo de esta primera lección es dar la definición formal de los asociadores de Drinfel'd y enunciar el teorema cuya demostración es el propósito central del curso.

En la segunda parte estudiaremos la ecuación KZ y daremos una definición analítica del asociador KZ. Luego, haremos un pequeño recordatorio sobre la teoría de las conexiones en un fibrado G-principal trivial.

En la tercera parte empezaremos introduciendo la conexión KZ definida en un fibrado $\exp(\hat{\mathfrak{t}}_n)$-principal trivial sobre el espacio de configuraciones del plano complejo. Luego daremos una definición geométrica del asociador KZ y demostraremos que es un $\mathbb{C}$-asociador de Drinfel'd.

Nota. El material de este minicurso es standard, el autor no reclama originalidad de prácticamente ningún resultado que figura aquí. Al final de cada lección aparecen noticias bibliográficas donde el lector podrá continuar y extender el trabajo realizado y del cual el autor se ha inspirado para construir este curso. Agradezco en particular a Damien Calaque y Pierre Lochak por su relectura y sus varios comentarios que mejoraron considerablemente estas notas escritas. Correcciones y demás comentarios son bienvenidos.

Notaciones

- En el conjunto de estas lecciones, $\mathbf{k}$ designa un cuerpo de característica nula, lo que quiere decir que el entero positivo más pequeño n tal que $n \cdot 1_{\mathbf{k}} = 1_{\mathbf{k}} + \cdots + 1_{\mathbf{k}} = 0$ es $n = 0$, como es el caso de $\mathbb{Q}$ - y a diferencia de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ donde p es un número primo.

  Ejercicio 1 *Utilizar el Lema de Euclides para demostrar que, para que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sea un cuerpo, p debe ser primo.*

- Recordamos también que el *producto tensorial* $E \otimes F$ de dos espacios vectoriales sobre $\mathbf{k}$, E y F, es el único (módulo un único isomorfismo) espacio vectorial sobre $\mathbf{k}$ provisto de una aplicación bilinear

$$\begin{aligned} \pi : E \times F &\longrightarrow E \otimes F \\ (e, f) &\longmapsto e \otimes f \end{aligned}$$

  tal que para todo espacio vectorial G y toda aplicación bilinear $f : E \times F \longrightarrow G$, existe una única aplicación

[6] Nos limitaremos a la investigación *matemática* de esta teoría. Desde el punto de vista de la física, según Edward Witten, la existencia de la conexión KZ puede ser entendida naturalmente como la cuantización holográfica del modelo WZW sobre el grupo de Lie G por cuantización geométrica de la G-teoría de Chern-Simons. Este ámbito no será tratado en este curso, el lector deseoso de descubrir este campo podrá consultar la excelente introducción [Gaw99] sobre el tema.

linear $\tilde{f} : E \otimes F \longrightarrow G$ de manera que el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & G \\ E \otimes F \arrow[ur, dashed, "\exists! \tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

conmute, es decir de manera que $f = \tilde{f} \circ \pi$.

- En particular, dado un $\mathbf{k}$-espacio vectorial V y $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, podemos definir $V^{\otimes n} := V \overset{n \text{ veces}}{\otimes \cdots \otimes} V$. Declarando que $V^{\otimes 0} := \mathbf{k}$ por convención, podemos definir el álgebra tensorial de V como el espacio vectorial

$$TV := \bigoplus_{n \geqslant 0} V^{\otimes n}$$

junto con la extensión de la multiplicación $V^{\otimes n} \otimes V^{\otimes m} \longrightarrow V^{\otimes n+m}$, definida por el producto tensorial, al espacio TV por linearidad.

1. Álgebras asociativas y álgebras de Lie

1.1. Álgebras asociativas

Recordamos la definición de una $\mathbf{k}$-álgebra asociativa a continuación.

Definición 1 *Una* $\mathbf{k}$-álgebra asociativa *es un par* $(\mathcal{A}, \cdot)$ *donde* $\mathcal{A}$ *es* $\mathbf{k}$*-espacio vectorial junto con una aplicación bilinear, llamada* multiplicación

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ (x, y) & \longmapsto & x \cdot y \end{array}$$

que satisface $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ *para cada* $x, y, z \in \mathcal{A}$. *Se dice que el álgebra* $\mathcal{A}$ *es* unitaria *si existe un elemento neutro para la multiplicación (es decir un elemento* 1 *que satisface* $1 \cdot x = 1 = x \cdot 1$ *para todo* $x \in \mathcal{A}$*).*

Ejemplo 1

1. *Las matrices cuadradas* $n \times n$ *a valores en el cuerpo* $\mathbf{k}$ *forman un álgebra asociativa unitaria sobre* $\mathbf{k}$*, no necesariamente conmutativa.*

2. *El conjunto de números complejos* $\mathbb{C}$ *forma un álgebra asociativa, conmutativa y unitaria de dimensión real 2.*

3. *Los polinomios con coeficientes en* $\mathbf{k}$ *forman un álgebra asociativa, conmutativa y unitaria de dimensión infinita en* $\mathbf{k}$.

4. *En particular* TV *puede ser provisto de una estructura de* $\mathbf{k}$*-algebra con la multiplicación*

$$\begin{array}{rcl} TV \times TV & \longrightarrow & TV \\ (x = (x_0, x_1, \ldots, x_n), y = (y_0, y_{1,\ldots}, y_m)) & \longmapsto & x \cdot y := (x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_m) \end{array}$$

donde $x_i \in V^{\otimes i}, y_j \in V^{\otimes j}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n, \forall 1 \leqslant j \leqslant m$.

(Demostrar que esta multiplicación es asociativa)

5. *Sea* $\mathbf{k}\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$ *la* $\mathbf{k}$*-álgebra asociativa de series formales de potencias en dos variables* X_0*,* X_1 *no comutativas. Los elementos de esta* $\mathbf{k}$*-álgebra son de la forma*

$$f(X_0, X_1) = \sum_{\omega \text{ palabra en } X_0, X_1} c_\omega \cdot \omega$$

donde X_0 *y* X_1 *son símbolos formales que no conmutan entre ellos, donde* $c_\omega \in \mathbf{k}$ *y donde* ω *es una palabra compuesta únicamente de (potencias de) letras* X_0 *y* X_1*, es decir de la forma*

$$\omega = X_{j_0}^{n_0} X_{j_1}^{n_1} X_{j_2}^{n_2} \cdots X_{j_p}^{n_p}$$

donde $j_0, \ldots, j_p \in \{0, 1\}$*,* $p, n_0, \ldots, n_p \in \mathbb{N}$*. Por ejemplo,* $\omega = X_1^3 X_0 X_1^2 X_0^9 X_1$ *es una palabra.*

Pasemos a continuación a la definición de un álgebra de Lie.

1.2. Álgebras de Lie

Definición 2 *Un* álgebra de Lie sobre un cuerpo $\mathbf{k}$ *es un espacio vectorial* $\mathfrak{g}$ *provisto de una aplicación bilinear antisimétrica llamada* corchete de Lie*:*

$$\begin{array}{rcl} [-,-] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ (X, Y) & \longmapsto & [X, Y] \end{array}$$

que satisface la identidad de Jacobi*:*

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

para cada $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$*. Un morfismo de* $\mathbf{k}$*-álgebras de Lie es una aplicación entre* $\mathbf{k}$*-espacios vectoriales*

$$f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$$

compatible con el corchete de Lie de $\mathfrak{g}$ *y con el de* $\mathfrak{h}$*, es decir:*

$$f([x, y]_\mathfrak{g}) = [f(x), f(y)]_\mathfrak{h}$$

para todo $x, y \in \mathfrak{g}$*. Un* ideal $\mathfrak{i}$ *(resp. una* subálgebra $\mathfrak{h}$*) de* $\mathfrak{g}$ *es un subespacio vectorial de* $\mathfrak{g}$ *tal que:*

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{i}] \subseteq \mathfrak{i} \text{ (resp. } [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}).$$

Dado un ideal $\mathfrak{i}$ *de* $\mathfrak{g}$ *uno puede formar el* cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$*: es el espacio vectorial* $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ *provisto del corchete*

$$[g + \mathfrak{i}, g' + \mathfrak{i}] := [g, g'] + \mathfrak{i}.$$

Observación 1 *La antisimetría quiere decir*$[x, y] = [y, x]$.

La bilinearidad quiere decir

$$[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z] \text{ y } [z, ax + by] = a[z, x] + b[z, y],$$

para todos $a, b \in \mathbf{k}$ *y todos* $x, y, z \in \mathfrak{g}$*.*

Ejemplo 2

1. *Cualquier espacio vectorial* E *puede ser provisto de una estructura de álgebra de Lie estableciendo*

$$\forall x, y \in E : [x, y] = 0.$$

Tal álgebra de Lie, donde el corchete de Lie es idénticamente nulo, se llama álgebra de Lie abeliana.

2. *A partir de un álgebra asociativa* $(\mathcal{A}, \cdot)$ *sobre* $\mathbf{k}$*, uno puede siempre construir una* $\mathbf{k}$*-álgebra de Lie estableciendo, para todo* $x, y \in \mathcal{A}$*:*
$$[x, y] := x \cdot y - y \cdot x$$
(el conmutador de los dos elementos x *e* y*). Es fácil comprobar que esto define una estructura de álgebra de Lie.*

3. *Como un ejemplo concreto de la situación anterior, consideremos* $\mathcal{M}_n(\mathbf{k})$ *el espacio de las matrices* $n \times n$ *con coeficientes en* $\mathbf{k}$*. Esta es un álgebra asociativa provista del producto de matrices usual. También podemos darle una estructura de álgebra de Lie, con el corchete*
$$[A, B] = \mathrm{AB} - \mathrm{BA}\,.$$
Notamos $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{k})$ *esta álgebra de Lie.*

Observación 2 *El* teorema de Ado *muestra que cualquier álgebra de Lie de dimensión finita puede ser vista como una sub-álgebra de* $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{k})$*. Lastimosamente, la mayoría de álgebras de Lie con las que trabajaremos son de dimensión infinita, como es el caso del álgebra de Lie libre a dos (o más) generadores que definimos a continuación.*

Proposición-Definición. *Sea* S *un conjunto. La* $\mathbf{k}$*-álgebra de Lie* $\mathfrak{f}_S(\mathbf{k})$ *libre sobre* S *es la única (módulo un único isomorfismo) álgebra de Lie provista de un morfismo de conjuntos* $\pi : S \longrightarrow \mathfrak{f}_S(\mathbf{k})$ *tal que, para cada álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *y cada morfismo de conjuntos* $f : S \longrightarrow \mathfrak{g}$*, existe un único morfismo de álgebras de Lie* $\widetilde{f} : \mathfrak{f}_S(\mathbf{k}) \longrightarrow \mathfrak{g}$ *de manera que el diagrama siguiente conmute:*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathfrak{g} \\ \mathfrak{f}_S(\boldsymbol{k}) \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

es decir de manera que $f = \tilde{f} \circ \pi$*.*

Si $S = \{X, Y\}$, notaremos de ahora en adelante $\mathfrak{f}_S(\mathbf{k}) = \mathfrak{f}(X, Y)$.

Observación 3 *Detallemos un poco esta definición. Una* palabra de Lie *en símbolos* $X_1, \ldots, X_n$ *es un corcheteado formal de estos símbolos, por ejemplo*
$$[[X_1, X_4], [[X_7, [X_9, X_2]], X_1]].$$
El álgebra de Lie $\mathfrak{f}_S(\mathbf{k})$ *debe ser entendida como el* $\mathbf{k}$*-espacio vectorial engendrado por todas las (combinaciones lineares de)* palabras de Lie *módulo el subespacio obtenido aplicando la relación de antisimetría y la identidad de Jacobi. Concretamente, si tomamos* $S = \{A, B\}$*, entonces un elemento de* $\mathfrak{f}_S(\mathbf{k})$ *es una suma finita*
$$f(A, B) = \sum_{\omega \text{ palabra de Lie en } A,B} c_w \cdot \omega$$
donde $c_w \in \mathbf{k}$*.*

Observación 4 *Un álgebra puede presentarse por generadores y relaciones: es simplemente el álgebra de Lie cociente entre el álgebra de Lie libre en tales generadores y el ideal engendrado por tales relaciones. Simplemente hay que verificar que el subespacio vectorial engendrado por las relaciones nos da efectivamente un ideal.*

Toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ está contenida en un álgebra asociativa $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ - generalmente (mucho) más grande que $\mathfrak{g}$ - llamada *álgebra universal envolvente de* $\mathfrak{g}$ y donde $[-,-]_{\mathfrak{g}}$ coincide con el corchete dado por el conmutador de dos elementos $[x, y] := x \cdot y - y \cdot x$ definida a continuación.

Definición 3 *La $\mathbf{k}$-álgebra universal envolvente de $\mathfrak{g}$, notada $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es la única (módulo un único isomorfismo) álgebra asociativa provista de un morfismo de $\mathbf{k}$-álgebras de Lie $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tal que para cada álgebra asociativa $\mathcal{A}$ y cada morfismo $f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{A}$, existe un único morfismo de álgebras asociativas $\widetilde{f} : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{A}$ de manera que el diagrama siguiente conmute:*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{A} \\
\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \arrow[ur, dashed, "\exists ! \tilde{f}"']
\end{tikzcd}$$

es decir de manera que $f = \tilde{f} \circ \pi$.

Observación 5 *Concretamente, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es el cociente $T(\mathfrak{g})/\mathcal{I}$ del álgebra tensorial módulo el ideal bilátero engendrado por la relación*

$$x \otimes y - y \otimes x = [x, y].$$

Ejemplo 3 *Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{f}_S(\mathbf{k})$ y $S = \{x_1, \ldots, x_m\}$ entonces $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathbf{k}\langle S\rangle$, el álgebra asociativa libre en símbolos S cuya base está dada por las palabras $\omega = x_{j_1} \cdots x_{j_n}$ donde $j_i \in \{1, \ldots, m\}$ para todo $i = 1, \ldots, n$.*

1.3. Ejemplo: El álgebra de Lie de Kohno-Drinfel'd

Definición 4 *El álgebra de Lie de Kohno-Drinfel'd sobre $\mathbf{k}$, notada $\mathfrak{t}_n(\mathbf{k})$, es el álgebra de Lie engendrada libremente por símbolos t_{ij}, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, módulo el ideal engendrado por las relaciones siguientes:*

$$\begin{aligned} t_{ij} &= t_{ji} & (1) \\ [t_{ij}, t_{kl}] &= 0 & (2) \\ [t_{ij}, t_{ik} + t_{jk}] &= 0 & (3) \end{aligned}$$

donde $\operatorname{card}\{i, j, k, l\} = 4$. Estas relaciones son usualmente llamadas relaciones de trenzas infinitesimales. En el próximo capítulo justificaremos esta apelación. En el caso $\mathbf{k} = \mathbb{C}$, usaremos la notación $\mathfrak{t}_n(\mathbb{C}) := \mathfrak{t}_n$.

El siguiente ejercicio será muy importante para entender la última lección del curso.

Ejercicio 2 ***Estúdio de*** $\mathfrak{t}_n(\mathbf{k})$ ***para*** $n \leqslant 3$***:***

1. *Demostrar que $c_n := \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} t_{ij}$ es central en $\mathfrak{t}_n(\mathbf{k})$ (es decir que conmuta con todo elemento de $\mathfrak{t}_n(\mathbf{k})$).*
2. *Deducir que podemos definir el cociente $\bar{\mathfrak{t}}_n(\mathbf{k}) := \mathfrak{t}_n(\mathbf{k})/\langle c_n\rangle$.*
3. *Calcular las $\mathbf{k}$-álgebras de Lie $\mathfrak{t}_2(\mathbf{k})$ y $\bar{\mathfrak{t}}_2(\mathbf{k})$.*
4. *Demostrar que $\bar{\mathfrak{t}}_3(\mathbf{k})$ no es más que la $\mathbf{k}$-álgebra de Lie libre a dos generadores.*
5. *Demostrar que la subálgebra de Lie de $\mathfrak{t}_n(\mathbf{k})$ engendrada por t_{ij}, donde $i, j \in [n1]$, se identifica a $\mathfrak{t}_{n-1}(\mathbf{k})$.*
6. *Demostrar que la subálgebra de Lie de $\mathfrak{t}_n(\mathbf{k})$ engendrada por $t_{1n}, t_{2n} \ldots, t_{(n1)n}$ se identifica con el álgebra de Lie libre $\mathfrak{f}_n(\mathbf{k})$.*
7. *Deducir que existe un isomorfismo de álgebras de Lie*
$$\mathfrak{t}_n(\mathbf{k}) \simeq \mathfrak{t}_{n-1}(\mathbf{k}) \oplus \mathfrak{f}_n(\mathbf{k}).$$
8. *Sea $\mathbf{k}c_3$ el álgebra de Lie abeliana engendrada por $c_3 = t_{12} + t_{13} + t_{23}$. Deducir que existe un isomorfismo de álgebras de Lie*
$$\mathfrak{t}_3(\mathbf{k}) \simeq \mathbf{k}c_3 \oplus \mathfrak{f}_2(\mathbf{k})$$
donde $\mathfrak{f}_2(\mathbf{k})$ es el álgebra de Lie libre engendrada por t_{13} y t_{23} (o, de manera equivalente, por t_{12} y t_{23}).

2. El grupo exponencial

2.1. Álgebras asociativas completadas filtradas

Definición 5 *Un* anillo topológico *es un anillo provisto de una estructura topológica de manera que la multiplicación $A \times A \longrightarrow A$ sea un homomorfismo de espacios topológicos. Un* espacio vectorial topológico *sobre un cuerpo topológico* $\mathbf{k}$ *es un* $\mathbf{k}$*-espacio vectorial tal que la adición y la multiplicación por escalares del espacio vectorial sean homomorfismos.*

En este minicurso, usaremos principalmente la topología standard y la topología discreta.

Ejercicio 3 *Definir las nociones de* $\mathbf{k}$*-álgebra asociativa topológica y* $\mathbf{k}$*-álgebra de Lie topológica.*

Definición 6 *Una* $\mathbf{k}$*-álgebra asociativa* $\mathcal{A}$ *es filtrada si está equipada con una secuencia descendiente de ideales*

$$\mathcal{A} = \mathfrak{m}_0 \supset \mathfrak{m}_1 \supset \mathfrak{m}_2 \cdots$$

Observación 6 *Una* $\mathbf{k}$*-álgebra filtrada* $(\mathcal{A}, \{\mathfrak{m}_i\}_{i\in I})$ *induce un sistema dirigido de anillos cocientes*

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{A}/\mathfrak{m}_{i+1} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathfrak{m}_i \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{A}/\mathfrak{m}_2 \longrightarrow \mathcal{A}/\mathfrak{m}_1 \longrightarrow 0.$$

Definición 7 *La compleción del álgebra asociativa filtrada* $(\mathcal{A}, \{\mathfrak{m}_i\}_{i\in I})$ *es la* $\mathbf{k}$*-álgebra asociativa filtrada* $(\hat{\mathcal{A}}, \{\hat{\mathfrak{m}}_i\}_{i\in I})$ *donde*

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}} &:= \lim_{\substack{\leftarrow \\ i}} \mathcal{A}/\mathfrak{m}_i \\ &= \left\{ a = (a_0, a_1, \ldots) \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}/\mathfrak{m}_i \,\middle|\, a_j \equiv a_i [\operatorname{mod} \mathfrak{m}_i], \forall j > i \right\} \end{aligned}$$

y donde, para todo $i \in I$*:*

$$\hat{\mathfrak{m}}_i := \{a = (a_0, a_1, \ldots) \in \hat{\mathcal{A}} | a_j = 0, \forall j \leqslant i\}.$$

Observación 7 *Se pueden identificar las* $\mathbf{k}$*-álgebras cociente* $\mathcal{A}/\mathfrak{m}_i$ *y* $\hat{\mathcal{A}}/\hat{\mathfrak{m}}_i$*.*

Proposición-Definición. *Si* $(\mathcal{A}, \{\mathfrak{m}_i\}_{i\in I})$ *es una* $\mathbf{k}$*-álgebra asociativa filtrada, entonces podemos asociarle una topología, llamada topología de Krull, definida, para cada punto* $a \in \mathcal{A}$*, por la base de vecindades*

$$\{a + \mathfrak{m}_i\}_{i\in\mathbb{N}}.$$

Observación 8 *En caso que los ideales* $\mathfrak{m}_i$ *sean iguales a potencias* $\mathfrak{m}_i := \mathcal{I}^i$ *para un mismo ideal* $\mathcal{I}$ *de* $\mathcal{A}$*, la compleción* $\hat{\mathcal{A}}$ *asociada a* $\mathcal{A}$ *es generalmente llamada compleción* $\mathcal{I}$*-ádica de* $\mathcal{A}$ *y su topología de Krull asociada es llamada topología* $\mathcal{I}$*-ádica.*

Proposición 1 *Vista como* $\mathbf{k}$*-álgebra de Lie filtrada y topológica con respecto a la topología de Krull, la compleción* $(\hat{\mathcal{A}}, \{\hat{\mathfrak{m}}_i\}_{i\in I})$ *de una* $\mathbf{k}$*-álgebra asociativa filtrada* $(\mathcal{A}, \{\mathfrak{m}_i\}_{i\in I})$ *es precisamente su compleción topológica.*

Demostración Sea $\{a_i\}_{i\geqslant 1}$ una secuencia de Cauchy de $\mathcal{A}$: para cada entorno abierto U de $\mathcal{A}$, existe un entero N_U tal que para todos $i, j > N_U$, tenemos $a_i - a_j \in U$. Esto es verificado si, y sólo si, para todo entero n, existe un entero N_n tal que, para todos $i, j > N_n$, tenemos

$$a_i - a_j \in \mathfrak{m}_i.$$

Ahora, una tal secuencia siempre converge en $\hat{\mathcal{A}}$ hacia el punto $a = (a_0, a_1, \ldots) \in \prod_{n \geqslant 1} \mathcal{A}/\mathfrak{m}_n$, donde, para todo n, tenemos $a_n \equiv a_{N_n} [\mathrm{mod}\, \mathfrak{m}_n]$.

Inversamente, todo punto de $\hat{\mathcal{A}}$ define una secuencia de Cauchy en $\mathcal{A}$. □

Ejemplo 4 *Si $\mathcal{A} = \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ es la $\mathbf{k}$-álgebra polinomial y $\mathcal{I}$ es su ideal maximal, entonces la compleción $\mathcal{I}$-ádica de $\mathcal{A}$ es la $\mathbf{k}$-álgebra*

$$\hat{\mathcal{A}} = \mathbf{k}[[X_1, \ldots, X_n]]$$

de series formales sobre $\mathbf{k}$ en n variables conmutativas.

2.2. Compleción en grados

La fórmula de Baker-Cambell-Hausdorff (BCH) sirve esencialmente para asociar un grupo a toda $\mathbf{k}$-álgebra de Lie completada (donde la aplicación exponencial no es necesariamente un morfismo de grupos).

Definición 8 *Un álgebra de Lie graduada es un álgebra de Lie ordinaria $\mathfrak{g}$ provista de una graduación de espacios vectoriales:*

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{n=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{g}_n$$

de manera que el corchete de Lie sea compatible con la graduación, es decir:

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subseteq \mathfrak{g}_{i+j}.$$

Observación 9 *Si $\mathfrak{g}$ es graduada, entonces $\mathfrak{g}$ induce la misma graduación a nivel de su álgebra universal envolvente $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.*

Sea $\mathfrak{g} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathfrak{g}_n$ un álgebra de Lie positivamente graduada de manera que cada $\mathfrak{g}_n$ sea de dimensión finita. Podemos equiparla con una *filtración descendiente de ideales de Lie* $\mathfrak{m}_n := \underset{n \leqslant i}{\oplus} \mathfrak{g}_i$ de manera que obtenemos una secuencia descendiente:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m}_0 \supset \mathfrak{m}_1 \supset \mathfrak{m}_2 \supset \cdots$$

Proposición-Definición. *La compleción en grados de $\mathfrak{g}$ es la compleción de $\mathfrak{g}$ con respecto a la filtración $\{\mathfrak{m}_i\}_{i \geqslant 1}$, y se identifica con el siguiente producto:*

$$\hat{\mathfrak{g}} := \prod_{n=1}^{\infty} \mathfrak{g}_n.$$

Observación 10 *La diferencia entre $\mathfrak{g}$ y $\hat{\mathfrak{g}}$ reside en que los elementos en $\hat{\mathfrak{g}}$ pueden ser escritos como sumas eventualmente infinitas, a diferencia de los elementos de $\mathfrak{g}$.*

Ejemplo 5 *Sea $\mathfrak{f}_S(\mathbf{k})_n \subset \mathfrak{f}_S(\mathbf{k})$ el subespacio vectorial engendrado por las palabras de Lie con $(n-1)$ corchetes. Por ejemplo $\mathfrak{f}(X,Y)_1 = \mathbf{k}\langle X, Y\rangle$, $\mathfrak{f}(X,Y)_2 = \mathbf{k}\langle [X,Y]\rangle$ y $\mathfrak{f}(X,Y)_3 = \mathbf{k}\langle [X,[X,Y]], [Y,[Y,X]]\rangle$. Remarcamos que*

$$[\mathfrak{f}_S(\mathbf{k})_n, \mathfrak{f}_S(\mathbf{k})_m] \subset \mathfrak{f}_S(\mathbf{k})_{n+m},$$

por lo que podemos construir una graduación $\mathfrak{f}_S(\mathbf{k}) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathfrak{f}_S(\mathbf{k})_n$. Entonces, la compleción en grados de $\mathfrak{f}_S(\mathbf{k})$ es $\hat{\mathfrak{f}}_S(\mathbf{k}) = \prod_{n=1}^{\infty} \mathfrak{f}_S(\mathbf{k})_n$. Es fácil remarcar que $\hat{\mathfrak{f}}_S(\mathbf{k}) \subset \mathbf{k}\langle\langle S\rangle\rangle$. Si $S = \{X, Y\}$ notaremos de ahora en adelante $\hat{\mathfrak{f}}_S(\mathbf{k}) = \hat{\mathfrak{f}}(X,Y)$.

Ejemplo 6 *La* $\mathbf{k}$*-álgebra de Lie de Kohno-Drinfel'd* $\mathfrak{t}_n(\mathbf{k})$ *posee una graduación positiva estableciendo* $\deg(t_{ij}) := 1$

$$\mathfrak{t}_n(\mathbf{k}) = \bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathfrak{t}_n(\mathbf{k})_m$$

donde, por ejemplo, $\mathfrak{t}_n(\mathbf{k})_1 = \bigoplus_{i<j} \mathbf{k} t_{ij}$ *y* $\mathfrak{t}_n(\mathbf{k})_2 = \bigoplus_{i<j<k} \mathbf{k}[t_{ij}, t_{ik}]$. *Esto nos permite definir su compleción en grados* $\hat{\mathfrak{t}}_n(\mathbf{k})$.

2.3. La fórmula de Baker-Cambell-Hausdorff

Sean X, Y dos elementos de una $\mathbf{k}$-álgebra asociativa $\mathcal{A}$. Recordemos que las expresiones de exponencial y logaritmo en términos de series son

$$e^X := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}, \text{ y } \log(1+X) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n X^n}{n}$$

y están bien definidas desde que $x \in \mathcal{A}$ es una $\mathbf{k}$-álgebra asociativa completada. En particular, en el álgebra $\mathbf{k}[[X, Y]]$ de series formales en variables conmutativas, tenemos la relación

$$e^X e^Y = e^{X+Y}.$$

Sin embargo, en el álgebra $\mathbf{k}\langle\langle X, Y\rangle\rangle$ esta relación no es verdad por lo general. El objetivo de la série de Baker-Cambell-Hausdorff es justamente de arreglar este problema.

Definición 9 *El* elemento de Baker-Cambell-Hausdorff *es la serie formal* BCH *de* $\mathbf{k}\langle\langle X, Y\rangle\rangle$ *definida, para todo* $X, Y \in \mathbf{k}\langle\langle X, Y\rangle\rangle$, *por*

$$\begin{aligned} \mathrm{BCH}(X, Y) := \log(e^X e^Y) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 - \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{X^k Y^l}{k! l!}\right)^n \\ &= X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] + \frac{1}{12}[Y, [Y, X]] + \cdots \end{aligned}$$

Ejercicio 4 *Demostrar que* $\mathrm{BCH}(X, Y) \in \hat{\mathfrak{f}}(X, Y)$.

Proposición-Definición. *Sea* $\mathfrak{g}$ *una* $\mathbf{k}$*-álgebra de Lie completada. El* grupo exponencial $\exp(\mathfrak{g})$ associado a $\mathfrak{g}$ *es el grupo cuyo conjunto subyacente es el conjunto de elementos formales de la forma* $\{e^X, X \in \mathfrak{g}\}$ *(que es isomorfo al conjunto subyacente de* $\mathfrak{g}$*) provisto de la ley de multiplicación definida por la* fórmula de Baker-Cambell-Hausdorff*:*

$$\begin{aligned} \exp(\mathfrak{g}) \times \exp(\mathfrak{g}) &\longrightarrow \exp(\mathfrak{g}) \\ (e^X, e^Y) &\longmapsto e^{\mathrm{BCH}(X,Y)} \end{aligned}$$

Tenemos dos morfismos inversos el uno del otro

$$\begin{aligned} e : \mathfrak{g} &\longleftrightarrow \exp(\mathfrak{g}) : \log \\ X &\longleftrightarrow e^X \end{aligned}$$

Demostración Necesitamos demostrar que $\mathrm{BCH}(X, Y)$ converge, lo que está satisfecho automáticamente porque $\hat{\mathfrak{g}} = \varprojlim_n (\mathfrak{g}/\mathfrak{m}_n)$. Ejercicio: Establecer las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathrm{BCH}(X, 0) = \mathrm{BCH}(0, X) &= 0 \\ \mathrm{BCH}(X, -X) &= 1 \\ \mathrm{BCH}(\mathrm{BCH}(X, Y), Z) &= \mathrm{BCH}(X, \mathrm{BCH}(Y, Z)) = \log(e^X e^Y e^Z) \end{aligned}$$

la última ecuación tomando lugar en $\hat{\mathfrak{f}}(X,Y,Z)$. $\square$

Observación 11 *La definición de* $\exp(\mathfrak{g})$ *sólo tiene sentido cuando la característica de* $\mathbf{k}$ *es nula y cuando* $\mathfrak{g}$ *es completa, caso contrario el elemento* $\mathrm{BCH}(X,Y)$ *no tiene sentido.*

Ejemplo 7 *La inyección de álgebras de Lie*

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{f}(X,Y) & \hookrightarrow & \mathfrak{t}_3(\mathbf{k}) \\ X & \longmapsto & t_{12} \\ Y & \longmapsto & t_{23} \end{array}$$

induce una inyección de grupos $\exp(\hat{\mathfrak{f}}(X,Y)) \hookrightarrow \exp\left(\hat{\mathfrak{t}}_3(\mathbf{k})\right)$.

Estamos listos para enunciar los objetivos del minicurso.

3. Asociadores de Drinfel'd

El primer objetivo del minicurso será entender la siguiente definición que fue introducida por Drinfel'd en [Dri91].

Definición 10 *Un* $\mathbf{k}$*-asociador de Drinfel'd es un par* (λ,Φ) *donde* $\lambda \in \mathbf{k}^{\times}$ *y*

$$\Phi(X,Y) := e^{\phi(X,Y)} \in \exp(\hat{\mathfrak{f}}(X,Y)) \subset \mathbf{k}\langle\langle X,Y\rangle\rangle$$

que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\Phi(X,Y) = \Phi^{-1}(Y,X) \text{ en } \exp(\hat{\mathfrak{f}}(X,Y)) \tag{4}$$

$$e^{\frac{\pm\lambda}{2}t_{12}}\Phi(t_{13},t_{12})e^{\frac{\pm\lambda}{2}t_{13}}\Phi(t_{23},t_{13})e^{\frac{\pm\lambda}{2}t_{23}}\Phi(t_{12},t_{23}) = 1 \text{en } \exp\left(\hat{\mathfrak{t}}_3(\mathbf{k})\right) \tag{5}$$

y

$$\Phi(t_{13}+t_{23},t_{34})\Phi(t_{12},t_{23}+t_{24}) = \Phi(t_{12},t_{23})\Phi(t_{12}+t_{13},t_{24}+t_{34})\Phi(t_{23},t_{34}) \text{en } \exp\left(\hat{\mathfrak{t}}_4(\mathbf{k})\right). \tag{6}$$

El conjunto de $\mathbf{k}$*-asociadores de Drinfel'd será notado* $\mathrm{Asoc}(\mathbf{k})$.

Observación 12 *La ecuación (4) es llamada* relación de antisimetría*. Las dos relaciones (5) son llamadas* relaciones de los dos hexágonos *y la relación (6) es llamada* relación del pentágono.

Si bien nos hemos tomado el tiempo de definir cada objeto matemático mobilizado en esta definición, aún ignoramos - por el momento - cuál es el interés de este concepto matemático, cuál es la razón de ser de esas ecuaciones - a primera vista arbitrarias - y, sobretodo, cómo sabemos que un tal par efectivamente existe.

El segundo objetivo del curso será entonces de demostrar el teorema siguiente, debido a V. Drinfel'd:

Teorema A. *Los* $\mathbb{C}$*-asociadores existen.*

En particular, la demostración residirá en la existencia de un $\mathbb{C}$-asociador proveniente de la holonomía renormalizada de una célebre ecuación diferencial a dos variables no conmutativas llamada ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov. La conexión asociada a estas ecuaciones hace intervenir el grupos de trenzas (puras) que es el grupo fundamental de los espacios de configuraciónes del plano complejo, y el álgebra de Kohno-Drinfel'd, que es el álgebra de Lie de holonomía de estos espacios. Estos conceptos serán introducidos en la próxima lección.

Nota. El material de esta lección es relativamente standard (aparece esencialmente en Bourbaki). En particular se puede encontrar una introducción actual y detallada en el libro [Kas12]. Una introducción más directa puede ser encontrada en [Merk11].

Referencias

[BFL99] X. Buff, J. Fehrenbach y P. Lochak. Eléments de géométrie des espaces de modules des courbes. In *Espaces de modules des courbes, groupes modulaires et théorie des champs*, volumen 7 de *Panoramas et synthèses*. Société mathématique de France, 1999.

[Del89] Pierre Deligne. Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points. In *Galois groups over Q*, volumen 16 de *MSRI publications*, pages 72–297. Springer-Verlag, 1989.

[DM69] Pierre Deligne y David Mumford. The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publications Mathématiques de l'IHES*, 36:75–109, 1969.

[Dri91] V. G. Drinfeld. On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group that is closely connected with $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. *Leningrad Math. J.*, 2(4):829–860, 1991.

[Gaw99] Krzysztof Gawedzki. Conformal field theory: a case study. *ArXiv preprint hep-th/9904145*, , 1999.

[Gro97] A. Grothendieck. Esquisse d'un programme. In P. Lochak L. Schneps , editor , *Geometric Galois Actions*, volumen 242. London Mathematical Society Lecture Note Series, 1997.

[Kas12] Christian Kassel. *Quantum groups*, volumen 155. Springer Science & Business Media, 2012.

[Merk11] Serguei Merkulov. Grothendieck-Teichmüller group in algebra, geometry and quantization. Lecture notes, 2011.

[Kon99] Maxim Kontsevich. Operads and motives in deformation quantization. *Lett. Math. Phys.*, 48(1):3572, 1999.

[Wit89] Edward Witten. Quantum field theory and the Jones polynomial. *Comm. Math. Phys.*, 121(3):351–399, 1989.