



Índice

1. Soluciones de la ecuación de Knizhnik–Zamolodchikov universal	2
1.1. La ecuación KZ universal	2
1.2. Definición analítica del asociador KZ	2
1.3. Demostración analítica del Teorema A	4
2. Recordatorios sobre fibrados vectoriales y conexiones planas	6
2.1. Fibrados vectoriales	6
2.2. Conexiones planas	7
2.3. Fibrados G -principales y conexiones asociadas	9

Introducción

En la anterior lección nos dedicamos a presentar una definición formal de los asociadores de Drinfel'd. Recordemos que la \mathbf{k} -álgebra de Kohno-Drinfel'd $\mathfrak{t}_n(\mathbf{k})$ es la \mathbf{k} -álgebra de Lie libre con generadores $t_{i,j}$, $1 \leq i \neq j \leq n$, módulo las relaciones de trenzas infinitesimales

$$\begin{aligned} t_{ij} &= t_{ji} \\ [t_{ij}, t_{kl}] &= 0 \\ [t_{ij}, t_{ik} + t_{jk}] &= 0 \end{aligned}$$

donde $\text{card}\{i, j, k, l\} = 4$. Esta álgebra debe ser entendida como el \mathbf{k} -espacio vectorial engendrado por todas las (combinaciones lineares de) *palabras de Lie* módulo el subespacio obtenido aplicando la relación de antisimetría y la identidad de Jacobi y las relaciones de trenzas infinitesimales que acabamos de enumerar. Recordamos también que el grupo exponencial $\exp(\hat{\mathfrak{t}}_n(\mathbf{k}))$ de la completación en grados de la \mathbf{k} -álgebra de Kohno-Drinfel'd es el conjunto de símbolos e^f donde f es un elemento de $\hat{\mathfrak{t}}_n(\mathbf{k})$ (es decir que f es una suma posiblemente infinita de productos $c_\omega \cdot \omega$, donde ω es una palabra de Lie en los símbolos t_{ij}), junto con la multiplicación definida gracias a la fórmula BCH. Recordamos también la definición de los asociadores de Drinfel'd:

Un \mathbf{k} -asociador de Drinfel'd es un par (λ, Φ) donde $\lambda \in \mathbf{k}^\times$ y

$$\Phi(X, Y) := e^{\phi(X, Y)} \in \exp(\hat{\mathfrak{f}}(X, Y)) \subset \mathbf{k}\langle\langle X, Y \rangle\rangle$$

que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \Phi(X, Y) &= \Phi^{-1}(Y, X) \text{ en } \exp(\hat{\mathfrak{f}}(X, Y)) \\ e^{\frac{\pm\lambda}{2}t_{12}}\Phi(t_{13}, t_{12})e^{\frac{\pm\lambda}{2}t_{13}}\Phi(t_{23}, t_{13})e^{\frac{\pm\lambda}{2}t_{23}}\Phi(t_{12}, t_{23}) &= 1 \text{ en } \exp(\hat{\mathfrak{t}}_3(\mathbf{k})) \end{aligned}$$

y

$$\Phi(t_{13} + t_{23}, t_{34})\Phi(t_{12}, t_{23} + t_{24}) = \Phi(t_{12}, t_{23})\Phi(t_{12} + t_{13}, t_{24} + t_{34})\Phi(t_{23}, t_{34}) \text{ en } \exp(\hat{\mathfrak{t}}_4(\mathbf{k})).$$

El conjunto de \mathbf{k} -asociadores de Drinfel'd será notado $\text{Assoc}(\mathbf{k})$.

Por el momento no sabemos cuál es la razón de ser de estas ecuaciones pero estamos listos para realizar una primera demostración del resultado central del mini-curso:

Teorema. *El conjunto $\text{Assoc}(\mathbb{C})$ no está vacío.*

En particular, vamos a explicitar un \mathbb{C} -asociador por medio de la resolución de un cierto sistema de ecuaciones diferenciales a dos variables no conmutativas, cuya versión geométrica nos permitirá entender mejor la arquitectura de la definición de los asociadores de Drinfel'd. Vamos a seguir principalmente el artículo original de Drinfel'd [Dri91].

1. Soluciones de la ecuación de Knizhnik–Zamolodchikov universal

En esta sección, introduciremos las ecuaciones de Knizhnik¹–Zamolodchikov² (KZ) en su versión universal. Inicialmente, estas ecuaciones, que forman un sistema de ecuaciones en derivadas parciales complejas con puntos singulares regulares, nacieron en teoría cuántica de campos en física matemática (en especial en física de la materia condensada y física de altas energías) como ecuaciones que satisfacen un conjunto de restricciones adicionales para las funciones de correlación en el modelo de Wess-Zumino-Witten de la teoría conforme de campos (en dos dimensiones) asociados con un álgebra de Lie afín a un nivel fijo. El lector interesado en las ecuaciones KZ en el contexto de la teoría conforme de campos podrá consultar la exposición [Gaw99] sobre el tema.

1.1. La ecuación KZ universal

La versión universal de estas ecuaciones fue establecida por Drinfel'd en [Dri91] y son definidas para cualquier tipo de álgebra de Lie que satisfaga las relaciones de trenzas infinitesimales - es decir definidas en el álgebra de Lie de Kohno-Drinfel'd. Recordemos que el espacio de configuraciones de n puntos sobre el plano complejo es el siguiente subespacio abierto de \mathbb{C}^n :

$$\text{Conf}(\mathbb{C}, n) := \{\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i \neq z_j, \text{ si } i \neq j\}$$

Definición 1 Para cada $n \geq 2$, el sistema diferencial de Knizhnik–Zamolodchikov sobre (cualquier abierto dentro de) el espacio de configuración $\text{Conf}(\mathbb{C}, n)$ es

$$(KZ)_n : \quad dW = \frac{1}{2i\pi} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{t_{ij}}{z_i - z_j} (dz_i - dz_j)W$$

es decir, para $i = 1, \dots, n$:

$$(KZ)_n : \quad \frac{\partial W}{\partial z_i} = \frac{1}{2i\pi} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{t_{ij}}{z_i - z_j} W$$

donde W es una función definida en cualquier abierto $U \subset \text{Conf}(\mathbb{C}, n)$ y tomando valores en $\hat{U}(\hat{\mathfrak{t}}_n)$.

Cuando $n = 3$, las soluciones del sistema diferencial $(KZ)_3$ definirán un elemento de $\mathbb{C}\langle\langle X, Y \rangle\rangle$ y las relaciones entre los comportamientos asintóticos de estas soluciones cuando $n = 3, 4$ determinarán las relaciones que este elemento satisface. Es importante recalcar que este «principio de dos pisos» es suficiente para definir totalmente un asociador de Drinfel'd. La importancia de esta remarca será desarrollada en el próximo capítulo cuando integremos al curso la geometría subyacente a la definición del asociador KZ. Por ahora vamos a limitarnos trabajar con este sistema diferencial.

1.2. Definición analítica del asociador KZ

Recordemos que una función f de una (o varias) variable(s) compleja(s) es una función analítica en un punto x_0 si es desarrollable en serie entera en cualquier entorno de un punto x_0 contenido en su conjunto de definición. Esto quiere decir que, para todo entorno \mathcal{D}_{x_0} de x_0 contenido en el conjunto de definición de f , existe una secuencia $(a_n)_{n \geq 0}$ tal que, para todo $x \in \mathcal{D}_{x_0}$, la función f se escribe bajo la forma de una serie convergente

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

¹(1962-1987) Vadim Knizhnik, matemático ruso.

²(1952-) Alexander Zamolodchikov, matemático ruso.

Podemos fácilmente observar que el sistema (KZ)₃ se escribe en términos de la diferencial total

$$dW = \frac{1}{2i\pi} [t_{12}d \log(z_2 - z_1) + t_{13}d \log(z_3 - z_1) + t_{23}d \log(z_3 - z_2)]W.$$

Proposición 1 Las soluciones del sistema (KZ)₃ son del tipo

$$(z_3 - z_1)^{\frac{c_3}{2i\pi}} G \left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \right),$$

donde $c_3 := t_{12} + t_{13} + t_{23}$ y G es una serie formal en las variables no conmutativas t_{12}, t_{23} , con como coeficientes funciones analíticas en la variable compleja $z \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$, y que es solución de la ecuación diferencial lineal

$$G'(z) = \frac{1}{2i\pi} \left(\frac{t_{12}}{z} + \frac{t_{23}}{z-1} \right) G(z) \quad (1)$$

Demostración A título de ejercicio realizar las siguientes etapas :

1. Remarcar primeramente que

$$(z_3 - z_1)^{\frac{u}{2i\pi}} = \exp \left(\frac{\log(z_3 - z_1)u}{2i\pi} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log(k(z_3 - z_1))u^k}{(2i\pi)^k} \in \mathfrak{t}_3$$

pertenece al centro de \mathfrak{t}_3 .

2. Efectuar en (KZ)₃ el cambio de variable $W = (z_3 - z_1)^{\frac{u}{2i\pi}} \times I$.
3. Considerar el cambio de variable $z = \frac{(z_2 - z_1)}{(z_3 - z_1)}$ y concluir. □

Sea $\mathcal{U} = \mathbb{C} - (]-\infty, 0] \cup [1, \infty[)$ donde $]-\infty, 0]$ y $[1, \infty[$ son semi-rectas en $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Observemos que \mathcal{U} es simplemente conectado.

Observación 1 Gracias al teorema fundamental de las ecuaciones diferenciales lineares, la ecuación (1) tiene soluciones analíticas en \mathcal{U} que son únicas, una vez especificado un valor en cualquier punto de \mathcal{U} .

La ecuación (1) tiene dos únicas singularidades en \mathbb{C} que son $z = 0$ y $z = 1$ y estableciendo $w = 1/z$ observamos que esta ecuación también tiene una singularidad en ∞ . Estas tres singularidades son regulares (o Fuchianas).

Analicemos a continuación el comportamiento asintótico de la ecuación (1) cuando nos acercamos a sus dos únicas singularidades en \mathbb{C} que son $z = 0$ y $z = 1$.

Proposición-Definición. La ecuación (1) tiene dos únicas soluciones G_0 y G_1 tales que

$$G_0(z) \sim_0 z^{\frac{t_{12}}{2i\pi}} \quad (2)$$

$$G_1(z) \sim_1 (1-z)^{\frac{t_{23}}{2i\pi}} \quad (3)$$

En particular, G_0 y G_1 no son nulas y difieren por lo tanto de un elemento invertible. El asociador KZ es el cociente $\Phi_{KZ} := G_1^{-1}G_0 \in \mathbb{C}\langle\langle X, Y \rangle\rangle$.

Observación 2 Las ecuaciones (2) y (3) significan que $G_0(z)z^{-\frac{t_{12}}{2i\pi}}$ (resp. $G_1(z)(1-z)^{-\frac{t_{23}}{2i\pi}}$) tienen continuaciones analíticas en un entorno de 0 (resp. 1) tomando como valor en 0 (resp. en 1) el valor 1. Observamos de igual manera que $z^{\frac{t_{12}}{2i\pi}}$ y $(1-z)^{\frac{t_{23}}{2i\pi}}$ están bien definidas en \mathcal{U} .

Demostración El lector podrá consultar la prueba de la Proposición XIX,6,1. de [Kas12].

Ejercicio: demostrar que Φ_{KZ} es independiente de z calculando la derivada $\Phi'_{KZ}(z)$. □

Observación 3 Esta definición es válida para todos los símbolos A y B no conmutativos. Para cada par (A, B) , disponemos de dos funciones $G_0(z; A, B)$ y $G_1(z; A, B)$. Podemos entonces definir

$$\phi_{KZ}(A, B) := G_1(-; A, B)^{-1}G_0(-; A, B).$$

En particular, $\phi_{KZ}(t_{12}, t_{23}) = \Phi_{KZ}$.

Reformulemos el Teorema A de la siguiente manera:

Teorema A. El par $(1, \Phi_{KZ})$ es un \mathbb{C} -asociador de Drinfel'd.

1.3. Demostración analítica del Teorema A

A continuación reproducimos la demostración original de Drinfel'd del Teorema A.

1) Φ_{KZ} pertenece a $\exp(\hat{\mathfrak{t}}_3)$:

Pasaremos al lado de esta demostración por falta de tiempo pero dejamos un esqueleto de prueba : primeramente la completación $\hat{\mathcal{U}}(\hat{\mathfrak{t}}_3(\mathbf{k}))$ tiene una estructura de \mathbf{k} -álgebra de Hopf filtrada y completada. En particular, la comultiplicación Δ está dada por el producto tensorial completado $\hat{\otimes}$. Los elementos de $\exp(\hat{\mathfrak{t}}_3)$ se identifican con los elementos dichos group-like (elementos que verifican $\Delta(g) = g \hat{\otimes} g$) de $\hat{\mathcal{U}}(\hat{\mathfrak{t}}_3)$ por lo tanto basta con demostrar que $\Delta(\Phi_{KZ}) = \Phi_{KZ} \hat{\otimes} \Phi_{KZ}$. El final de la prueba se obtiene usando la observación 3: remarcando que Φ_{KZ} si G_0 y G_1 lo son, podemos (en el caso de G_0) usar la función $G_+(z) = G_0(z; t_{12} \otimes 1, t_{23} \otimes 1)G_0(z; 1 \otimes t_{12}, 1 \otimes t_{23})$ para concluir.

2) Antisimetría:

Si reemplazamos z por $1 - z$ en la ecuación (1), Φ_{KZ} es reemplazado por su inverso lo que equivale a permutar t_{12} con t_{23} es decir aplicar la permutación (123).

3) Pentágono:

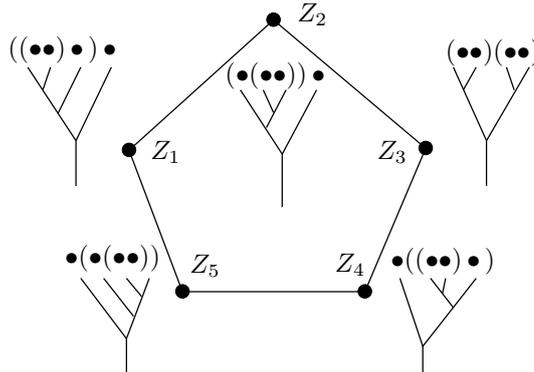
Empecemos describiendo los comportamientos asintóticos de las soluciones del sistema $(KZ)_4$. Sea

$$U := \{(z_1, \dots, z_4) \in \mathbb{R}^4 \mid z_1 < z_2 < z_3 < z_4\} \subset \text{Re}(\text{Conf}(\mathbb{C}, 4))$$

un abierto de la parte real del espacio de configuraciones del plano complejo a 4 puntos. Consideremos las 5 zonas de U siguientes:

$$\begin{array}{ll} (Z_1) & z_2 - z_1 \ll z_3 - z_1 \ll z_4 - z_1 \\ (Z_2) & z_3 - z_2 \ll z_3 - z_1 \ll z_4 - z_1 \\ (Z_3) & z_3 - z_2 \ll z_4 - z_2 \ll z_4 - z_1 \\ (Z_4) & z_4 - z_3 \ll z_4 - z_2 \ll z_4 - z_1 \\ (Z_5) & z_4 - z_3 \ll z_4 - z_1 \quad y \quad z_2 - z_1 \ll z_4 - z_1 \end{array}$$

Cómo representar estas zonas y como relacionarlas entre ellas? Es aquí donde interviene una de las ideas brillantes de Drinfel'd : corresponden a un pentágono donde cada arista corresponde a un arreglo de paréntesis : V_i y V_j están en la misma paréntesis y V_k fuera de ella si $|z_i - z_j| \ll |z_i - z_k|$. De esta manera, $z_2 - z_1 \ll z_3 - z_1 \ll z_4 - z_1$ corresponde a la paréntesis $((\bullet\bullet)\bullet)\bullet$. Podemos también decir que corresponde a un árbol trivalente con cuatro hojas como lo resume la siguiente imagen:



Lema 1 Existen cinco únicas soluciones W_1, \dots, W_5 al sistema de ecuaciones diferenciales $(KZ)_4$ teniendo los siguientes comportamientos asintóticos en las zonas correspondientes:

$$\begin{aligned} W_1 &\sim (z_2 - z_1)^{\frac{t_{12}}{2i\pi}} (z_3 - z_1)^{\frac{t_{13}+t_{23}}{2i\pi}} (z_4 - z_1)^{\frac{t_{14}+t_{24}+t_{34}}{2i\pi}} \\ W_2 &\sim (z_3 - z_2)^{\frac{t_{23}}{2i\pi}} (z_3 - z_1)^{\frac{t_{12}+t_{13}}{2i\pi}} (z_4 - z_1)^{\frac{t_{14}+t_{24}+t_{34}}{2i\pi}} \\ W_3 &\sim (z_3 - z_2)^{\frac{t_{23}}{2i\pi}} (z_4 - z_2)^{\frac{t_{24}+t_{34}}{2i\pi}} (z_4 - z_1)^{\frac{t_{12}+t_{13}+t_{14}}{2i\pi}} \\ W_4 &\sim (z_4 - z_3)^{\frac{t_{34}}{2i\pi}} (z_4 - z_2)^{\frac{t_{23}+t_{34}}{2i\pi}} (z_4 - z_1)^{\frac{t_{12}+t_{13}+t_{14}}{2i\pi}} \\ W_5 &\sim (z_2 - z_1)^{\frac{t_{12}}{2i\pi}} (z_4 - z_3)^{\frac{t_{34}}{2i\pi}} (z_4 - z_1)^{\frac{t_{13}+t_{14}+t_{23}+t_{24}}{2i\pi}} \end{aligned}$$

Es decir, tenemos por ejemplo

$$W_2 = f(u, v) (z_3 - z_2)^{\frac{t_{23}}{2i\pi}} (z_3 - z_1)^{\frac{t_{12}+t_{13}}{2i\pi}} (z_4 - z_1)^{\frac{t_{14}+t_{24}+t_{34}}{2i\pi}}$$

donde $u = \frac{(z_3 - z_2)}{(z_4 - z_1)}$, $v = \frac{(z_3 - z_1)}{(z_4 - z_1)}$ y f es una función analítica sobre una vecindad de $(0, 0)$ con $f(0, 0) = 1$.

Demostración Ejercicio: realicemos el cálculo para W_5 .

1. Demostrar que, en este caso, uno puede reducir el sistema $(KZ)_4$ a un sistema de tres variables únicamente.
2. Efectuar la substitución $W = g \cdot (z_4 - z_1)^{T/2i\pi}$ y reducir nuestro sistema en un sistema con sólo dos variables. Deducir que g es una función en u y v .
3. Deducir que el sistema $(KZ)_4$ se escribe ahora

$$dg = \frac{1}{2i\pi} [t_{12}d \log(u) + t_{34}d \log(v) + dR(u, v)] \cdot g$$

donde R es una función analítica en una vecindad de $(0, 0)$. Concluir.

4. Utilizar la técnica de las aproximaciones sucesivas para demostrar que existe una, y una sola solución de esta ecuación bajo la forma

$$\phi(u, v) u^{\frac{t_{12}}{2i\pi}} v^{\frac{t_{34}}{2i\pi}}$$

donde ϕ es una función analítica en una vecindad de $(0, 0)$ tal que $\phi(0, 0) = 1$

5. Porqué las funciones W_i se prolongan analíticamente a U ? (usar el principio del prolongamiento analítico)

□

Lema 2 Las expansiones asintóticas W_1, \dots, W_5 satisfacen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} W_1 &= W_2 \cdot \Phi_{KZ}(t_{12}, t_{23}) \\ W_2 &= W_3 \cdot \Phi_{KZ}(t_{12} + t_{13}, t_{24} + t_{34}) \\ W_3 &= W_4 \cdot \Phi_{KZ}(t_{23}, t_{34}) \\ W_4 &= W_5 \cdot \Phi_{KZ}(t_{13} + t_{23}, t_{34}) \\ W_5 &= W_1 \cdot \Phi_{KZ}(t_{12}, t_{23} + t_{34}) \end{aligned}$$

Demostración Demostremos la primera identidad. Sea $V_1 = W_1 \cdot (z_4 - z_1)^{-\frac{1}{2i\pi}(t_{14}+t_{24}+t_{34})}$. Tenemos

$$\begin{aligned} V_2 &= W_2 \cdot \Phi_{KZ}(t_{12}, t_{23}) \cdot (z_4 - z_1)^{-\frac{1}{2i\pi}(t_{14}+t_{24}+t_{34})} \\ &= W_2 \cdot (z_4 - z_1)^{-\frac{1}{2i\pi}(t_{14}+t_{24}+t_{34})} \cdot d_4 \Phi_{KZ}. \end{aligned}$$

En efecto, $t_{14} + t_{24} + t_{34}$ conmuta con todos los t_{ij} para $i, j < 4$ y por lo tanto con $\Phi_{KZ}(t_{12}, t_{23})$. Tenemos

$$(z_4 - z_1)^{-\frac{1}{2i\pi}(t_{14}+t_{24}+t_{34})} = e^{-\frac{1}{2i\pi}(t_{14}+t_{24}+t_{34}) \log(z_4 - z_1)}$$

que se desarrolla en serie y obtenemos la conmutación requerida.

Por otro lado, tenemos $V_1 = V_2$. En efecto, si $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$, entonces V_1 y V_2 son analíticas (y z_4 puede ser eventualmente infinito). Adicionalmente, V_1 y V_2 verifican

$$\frac{\partial V}{\partial z_i} = \begin{cases} \frac{1}{2i\pi} \sum_{j \neq 1} \frac{t_{ij}}{z_1 - z_j} \\ \frac{1}{2i\pi} \sum_{j \neq i} \frac{t_{ij}}{z_i - z_j} \cdot V - \frac{1}{2i\pi} \cdot \frac{t_{14} + t_{24} + t_{34}}{z_1 - z_4} & \text{si } i = 2, 3 \\ \frac{1}{2i\pi} \sum_{j \neq 4} \frac{[t_{14}, V]}{z_4 - z_j} \end{cases}$$

Las dos primeras ecuaciones y los desarrollos asintóticos de V_1 y V_2 demuestran que las dos funciones coinciden para $z_4 = \infty$. Gracias a esto, de la última ecuación, uno obtiene $V_1 = V_2$.

El resto de ecuaciones son encontradas de manera análoga. □

Finalmente, gracias a estas relaciones, obtenemos

$$\Phi_{KZ}(t_{13} + t_{23}, t_{34}) \Phi_{KZ}(t_{12}, t_{23} + t_{24}) = \Phi_{KZ}(t_{12}, t_{23}) \Phi_{KZ}(t_{12} + t_{13}, t_{24} + t_{34})_{KZ} \Phi(t_{23}, t_{34}).$$

Concluimos que Φ_{KZ} satisface el pentágono.

4) Dos Hexágonos:

Aplicando la permutación (123), descubrimos que las relaciones de los dos hexágonos son satisfechas por Φ_{KZ} si, y sólo si, una de ellas es satisfecha por Φ_{KZ} . Para demostrar que Φ_{KZ} satisface uno de los hexágonos uno procede de manera análoga a aquella usada para demostrar la relación del pentágono : encontrar seis soluciones de $(KZ)_3$ en regiones diferentes con comportamientos asintóticos standard correspondientes a las aristas de un hexágono y demostrar que estas soluciones tienen relaciones que implican la relación del hexágono.

Dejamos al cuidado del lector el detalle de esta demostración.

2. Recordatorios sobre fibrados vectoriales y conexiones planas

Recordamos muy rápidamente algunas definiciones de la teoría de fibrados vectoriales. El lector interesado en una introducción detallada e ilustrada sobre el tema podrá consultar [KN63].

2.1. Fibrados vectoriales

Un fibrado vectorial real (resp. complejo) consiste en

1. dos espacios topológicos X , llamado espacio de base y E , llamado espacio total;
2. una función continua y sobreyectiva $\pi : E \rightarrow X$ llamada proyección;
3. una estructura de espacio vectorial real (resp. complejo) en cada fibra $\pi^{-1}(\{x\})$, para cada $x \in X$,

que satisfacen la condición de compatibilidad siguiente: para todo $x_0 \in X$, existe una vecindad abierta U de x_0 , un número natural n , y un homeomorfismo:

$$\begin{aligned} \phi : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto (x, v) \end{aligned}$$

que satisfacen las siguientes aserciones:

1. el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi_1 \\ & U & \end{array}$$

i.e. $\pi_1 \circ \phi(x) = x$, donde

$$\begin{aligned} \pi_1 : U \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow U \\ (x, v) &\longmapsto x \end{aligned}$$

2. para todo $x \in U$, la función $v \mapsto \phi^{-1}(x, v)$ es un isomorfismo entre el espacio vectorial \mathbb{R}^n y $\pi^{-1}(\{x\})$.

En particular,

- La vecindad abierta U junto con el homeomorfismo ϕ se llama una trivialización local del fibrado.
- La trivialización local muestra que localmente la función π se asemeja a la proyección de $U \times \mathbb{R}^n$ en U .
- Un fibrado vectorial es dicho trivial si hay una "trivialización global", es decir si es isomorfo al espacio $X \times \mathbb{R}^n$ junto con la proyección $X \times \mathbb{R}^n \rightarrow X$.
- Cada fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow X$ es sobreyectivo, puesto que los espacios vectoriales no pueden ser vacíos.
- Cada fibra $\pi^{-1}(\{x\})$ es un espacio vectorial de dimensión finita y por lo tanto tiene una dimensión d_X . La función $x \mapsto d_x$ es localmente constante, es decir es constante en toda componente conexa de X .
- Si la dimensión es globalmente constante en X (lo que pasa si X es conexo por arcos), llamamos su único valor el rango del fibrado vectorial.
- Dado un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow X$ y un abierto U de X , podemos considerar secciones de π en U , es decir funciones continuas $s : U \rightarrow E$ con $\pi \circ s = \text{id}_U$. Notamos $\Gamma(U, E)$ el conjunto de tales funciones. Esencialmente, una sección asigna a cada punto de U un vector del espacio vectorial asociado, de una manera continua.

→ Por ejemplo, las secciones del fibrado tangente de una variedad diferenciable no son otra cosa que los campos vectoriales en esa variedad.

Sean E y X dos variedades analíticas complejas y sea $\mathcal{O}(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es analítica}\}$ el anillo de funciones holomorfas sobre X . Las definiciones que acabamos de enumerar se traducen fácilmente al caso geométrico complejo demandando que la proyección $E \rightarrow X$ sea holomorfa y reemplazando \mathbb{R}^n por \mathbb{C}^n en la definición de fibrado vectorial (las fibras $\pi^{-1}(\{x\})$ son ahora espacios vectoriales complejos).

2.2. Conexiones planas

Sea X una variedad compleja y $E \rightarrow X$ un fibrado vectorial complejo sobre X . Recordemos que $\Omega^0(X, E) = \Gamma(X, E)$ y que $\Omega^1(X, E) = \Gamma(T^*X \otimes E)$.

Definición 2 Una conexión ∇ sobre $E \rightarrow X$ es una aplicación lineal

$$\nabla : \Gamma(X, E) \rightarrow \Omega^1(X, E)$$

que verifica, para todo $f \in \mathcal{O}(X)$, $s \in \Gamma(X, E)$, la relación de Leibniz:

$$\nabla(f \cdot s) = (df) \otimes s + f \cdot \nabla(s).$$

Observación 4

- Sean ∇_1 y ∇_2 dos conexiones sobre $E \rightarrow X$. La diferencia $\nabla_1 - \nabla_2$ es $\mathcal{O}(X)$ -linear.
- Localmente, una sección s se escribe bajo la forma

$$s = f_1 e_1 + \dots + f_d e_d$$

donde f_1, \dots, f_d son funciones complejas analíticas sobre X y $\{e_1, \dots, e_d\}$ es una base de la fibra.

- Toda conexión ∇ sobre $E \rightarrow X$ puede ser escrita localmente bajo la forma

$$\nabla s = d_{\text{dR}} s - \Gamma s$$

donde d_{dR} es la diferencial de de Rham y Γ es una 1-forma diferencial sobre X tomando valores en el anillo $\text{End}(E)$ de endomorfismos de E .

- Una sección s de $E \rightarrow X$ es dicha horizontal con respecto a una conexión ∇ si $\nabla s = 0$ es decir, si localmente s es solución del sistema diferencial

$$ds = \Gamma s.$$

Pasemos a presente a recordar la noción de transporte paralelo para una conexión sobre un fibrado vectorial $E \rightarrow X$. Sea

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\rightarrow X \\ t &\mapsto \gamma(t) \end{aligned}$$

un camino continuo en X . Uno puede realizar el pullback de la matriz Γ de formas diferenciales sobre X a lo largo de γ en una matriz

$$A(t)dt = \gamma^*\Gamma$$

de formas diferenciales sobre el intervalo $[0, 1]$. Gracias a la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, existe un único mapa liso $A_\gamma : [0, 1] \rightarrow \text{Aut}^{\text{lin}}(E, X)$, donde $\text{Aut}^{\text{lin}}(E, X)$ es el grupo de automorfismos lineares del fibrado $E \rightarrow X$, tal que $A_\gamma(0) = \text{id}$ y $w(t) = A_\gamma(t)w(0)$ es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dw(t)}{dt} = A(t)w(t).$$

Definición 3 El transporte paralelo de la conexión ∇ a lo largo de γ es el isomorfismo linear $A_\gamma(1)$ entre la fibra en el punto inicial de γ y el punto final de γ . En este curso será notada

$$T_\gamma : F_{\gamma(0)} \xrightarrow{\cong} F_{\gamma(1)}.$$

En particular, tenemos una aplicación

$$(\gamma : [0, 1] \rightarrow X) \mapsto (T_\gamma : F_{\gamma(0)} \xrightarrow{\cong} F_{\gamma(1)})$$

de manera que si $\gamma' : [0, 1] \rightarrow X$ es tal que $\gamma(1) = \gamma'(0)$ (en cuyo caso decimos que los caminos continuos γ y γ' son yuxtaponibles y el camino $\gamma \cdot \gamma'$ es entonces continuo) entonces

$$T_{\gamma \cdot \gamma'} = T_\gamma \circ T_{\gamma'}.$$

Definición 4 El grupo de holonomía de ∇ basado en un punto $x_0 \in X$ es el subgrupo de $\text{Aut}(F_{\gamma(0)})$ engendrado por T_γ para todo lazo γ basado en $x_0 \in X$.

Sea ∇ una conexión sobre un fibrado vectorial $E \rightarrow X$. Podemos extender de manera única ∇ en una derivada covariante

$$\Gamma(E) \xrightarrow{\nabla} \Omega^1(X, E) \xrightarrow{\nabla} \Omega^2(X, E) \rightarrow \dots$$

vía la fórmula

$$\nabla(\omega \wedge \omega') = d\omega \wedge \omega' + (-1)^{|\omega|} \omega \wedge \nabla \omega'$$

Definición 5 La curvatura de la conexión ∇ es la aplicación

$$\nabla^2 := \nabla \circ \nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^2(X, E).$$

Observación 5

- La curvatura es una aplicación $\mathcal{O}(X)$ -linear.
- Localmente, la curvatura se expresa en términos de Γ por

$$\nabla^2 = -d_{\text{dR}}\omega + \omega \wedge \omega.$$

Antes de construir explícitamente la aplicación de transporte paralelo, vamos a modificar un poco el marco propuesto extendiéndolo al caso de los fibrados G -principales, donde G es un grupo de Lie.

2.3. Fibrados G -principales y conexiones asociadas

Sea G un grupo topológico.

Definición 6 Un G -fibrado principal es un fibrado $\pi : P \rightarrow M$ junto a una acción a la derecha continua libre y transitiva de G sobre P , notada

$$\begin{aligned} R : G &\longrightarrow \text{End}(P) \\ g &\longmapsto (R_g : p \mapsto g \cdot p) \end{aligned}$$

tal que G preserva las fibras de P (i.e. si $y \in \pi^{-1}(\{x\})$ entonces $y \cdot g \in \pi^{-1}(\{x\})$ para todo $g \in G$) y la acción es libre y transitiva.

Observación 6

1. Esto implica que cada fibra del fibrado es homeomorfa al grupo G .
2. Un fibrado principal es trivial si, y solamente si, admite una sección global.

Podemos extender esta definición al caso donde G es un grupo de Lie, \mathfrak{g} es su álgebra de Lie asociada, M es una variedad diferenciable demandando que π sea diferenciable y que la acción de G sobre P sea diferenciable. De esta manera, pediremos que la noción de conexión sea «compatible» con la acción de G de la manera siguiente:

Definición 7 Sea $P \rightarrow M$ un G -fibrado principal. Una conexión G -principal es definida por una 1-forma diferencial $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ a valores en el álgebra de Lie \mathfrak{g} de G tal que

1. ω es G -equivariante i.e. $\text{ad}_g(R_g^*\omega) = \omega$, donde ad_g es la representación adjunta sobre \mathfrak{g} ;
2. si $\gamma \in \mathfrak{g}$ y X_γ es el campo vectorial (fundamental) asociado a γ por diferenciación de la acción de G sobre P , entonces $\omega(X_\gamma) = \gamma$ (idénticamente sobre P).

Observación 7 Sea G un grupo de Lie, \mathfrak{g} su álgebra de Lie asociada, sea $P \rightarrow M$ un fibrado G -principal trivial y sea $\omega \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ una 1-forma diferencial que define una conexión sobre P . En este caso la curvatura está dada por la 2-forma diferencial a valores en \mathfrak{g} definida por

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega] \in \Omega^2(M, \mathfrak{g})$$

donde d es la diferencial exterior, $[- \wedge -]$ es la operación $\Omega^1(M, \mathfrak{g}) \times \Omega^1(M, \mathfrak{g}) \rightarrow \Omega^2(M, \mathfrak{g})$ definida, para todo par de vectores tangentes v_1 y v_2 a M , por

$$[\omega \wedge \eta](v_1, v_2) = [\omega(v_1), \eta(v_2)] - [\omega(v_2), \eta(v_1)]$$

de manera que obtenemos

$$\Omega(v_1, v_2) = d\omega(v_1, v_2) + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega](v_1, v_2) = d\omega(v_1, v_2) + [\omega(v_1), \omega(v_2)].$$

Notaremos en lo que sigue $[\omega, \omega]$ para el corchete de 1-formas. Expliquemos rápidamente la formulación del transporte paralelo bajo la forma de exponencial a caminos ordenados de una integral.

Observación 8 Sea G un grupo de Lie y \mathfrak{g} su álgebra de Lie asociada. Consideremos el siguiente problema de Cauchy general:

$$\begin{cases} d\varphi = \alpha\varphi \\ \varphi(0) = 1_G \end{cases} \quad (4)$$

donde $\varphi : [0, 1] \rightarrow G$ es una función y $\alpha \in \Omega^1([0, 1], \mathfrak{g})$ es una 1-forma diferencial a valores en \mathfrak{g} . Entonces existe una única solución ϕ de (4) y definimos la exponencial a caminos ordenados

$$\mathcal{P} \exp \left(\int_0^1 \alpha \right) := \phi(1) \in G.$$

De manera explícita, gracias al método de iteraciones sucesivas de Picard, podemos desarrollar este elemento en las llamadas series de Dyson:

$$\mathcal{P} \exp \left(\int_0^1 f(t) dt \right) = 1 + \left(\int_0^1 f(t_1) dt_1 \right) + \cdots + \left(\int_{0 \leq t_n \leq \dots \leq t_1 \leq 1} dt_1 \dots dt_n f(t_1) \dots f(t_n) \right) + \cdots$$

Podemos extender de manera similar esta definición para toda variedad analítica M considerando, para $\alpha \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ y $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, la exponencial a caminos ordenados

$$\mathcal{P} \exp \left(\int_{\gamma} \alpha \right) = \mathcal{P} \exp \left(\int_{[0,1]} \gamma^* \alpha \right).$$

En este caso, considerando el fibrado G -principal trivial sobre M , el transporte paralelo de la conexión $\nabla = d - \alpha$ a lo largo del camino γ es precisamente $\mathcal{P} \exp \left(\int_{\gamma} \alpha \right)$.

De manera general:

Proposición-Definición. Sea $P \rightarrow M$ el fibrado G -principal trivial sobre M y ∇ una conexión sobre este fibrado. Se dice que una conexión ∇ es plana si, de manera equivalente:

1. La curvatura $\nabla \circ \nabla$ de la conexión es nula;
2. la 1-forma ω asociada ∇ satisface la ecuación de Maurer-Cartan:

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0;$$

3. Para cada par (γ_1, γ_2) de caminos homotópicos en X tenemos $T_{\gamma_1} = T_{\gamma_2}$.

Observación 9 Si es el caso, entonces el transporte paralelo de ∇ a lo largo de un lazo basado en un punto $x_0 \in X$ induce un morfismo de grupos

$$\rho : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{Aut}(E_{x_0})$$

llamado morfismo de monodromía o aún representación de monodromía del grupo fundamental de X con respecto a su acción en la fibra de x_0 .

Demostración Solo demostraremos la primera equivalencia:

- El paso 1 \implies 2 : Una sección horizontal de esta conexión satisface $df = -\omega f$. Si la conexión es plana, entonces

$$0 = -d^2 f = d(\omega f) = (d\omega)f - \omega \wedge df = (d\omega + \omega \wedge \omega)f = \left(d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \right) f$$

es satisfecho para toda sección horizontal. Como (localmente) existe un marco plano del fibrado, esto implica que $d\omega + \omega \wedge \omega = 0$.

- El paso 2 \implies 1 : Resulta del teorema de Frobenius. □

En la próxima - y última - sección de este minicurso vamos a estudiar en detalle una cierta conexión que podemos asociar al sistema $(KZ)_n$, vamos a descubrir como calcular valores mutizetas y encontrar nuevas relaciones para estos valores a partir del asociador KZ.

Referencias

- [Dri91] V. G. Drinfeld. On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group that is closely connected with $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. *Leningrad Math. J.*, 2(4):829–860, 1991.
- [Gaw99] Krzysztof Gawedzki. Conformal field theory: a case study. *ArXiv preprint hep-th/9904145*, , 1999.
- [Kas12] Christian Kassel. *Quantum groups*, volumen 155. Springer Science & Business Media, 2012.
- [KN63] Shoshichi Kobayashi y Katsumi Nomizu. *Foundations of Differential Geometry. vol. 1*. Interscience (Wiley), New York, 1963.