

Grupos de simetría de objetos geométricos

EPN, Octubre 2020

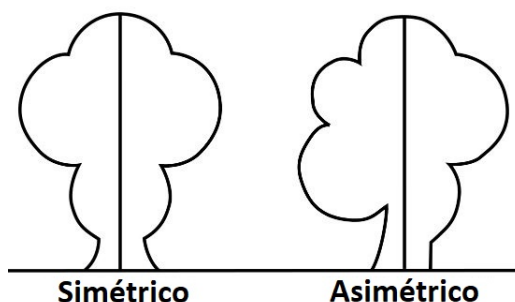
Índice

1. Simetrías en dos dimensiones	1
1.1. Las simetrías de un objeto geométrico plano	1
1.2. De las simetrías a los grupos abstractos	3
1.3. De regreso a la geometría: simetrías de cuerpo rígido	4
2. La tercera dimensión: Los sólidos Platónicos	5
2.1. Característica de Euler y grafos planares	6
2.2. Existencia de sólo 5 sólidos Platónicos	8
2.3. Dualidad de sólidos Platónicos	10
3. Grupos de automorfismos de sólidos platónicos	11
3.1. Las complicaciones de la tercera dimensión	11
3.2. El grupo Simétrico y los vértices del tetraedro	13
3.3. Subgrupos de un grupo	13
3.4. Las simetrías del tetraedro	15
3.5. Caracterización de los sólidos por sus grupos de simetrías	16
4. Geometría Algebraica: otros objetos geométricos	16
4.1. Otras estructuras abstractas	16
4.2. Variedades algebraicas	17
4.3. Morfismos de variedades	20
4.4. Las simetrías de la recta afín	22
4.5. Variedades Tóricas	23

1. Simetrías en dos dimensiones

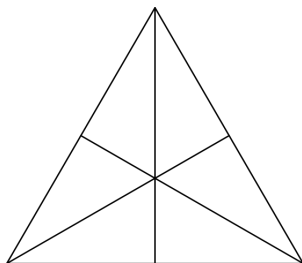
1.1. Las simetrías de un objeto geométrico plano

La palabra simetría viene del griego *symetria*, cuya traducción laxa se puede entender como “con medidas concordantes”. La simetría aparece en virtualmente cualquier construcción natural o humana. En el lenguaje cotidiano el significado de la palabra es usualmente claro, por ejemplo, en la siguiente imagen se muestra una figura simétrica y una asimétrica.



Identificamos la figura de la izquierda como simétrica, mientras que la de la derecha claramente no lo es. Una manera de explicar esto es que si reflejamos el dibujo a lo largo de la línea vertical dibujada, el primer dibujo se mantiene invariante, mientras que el segundo no cumple esta propiedad. A la línea dibujada se suele llamar *eje de simetría* y es claro que mientras el eje de simetría vertical es fácil de encontrar, ninguna línea horizontal funge de eje de simetría para esta imagen.

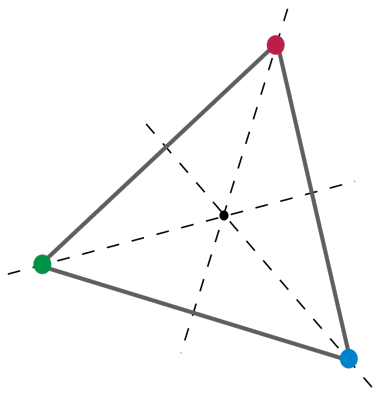
Consideremos ahora un triángulo equilátero, esto es, un triángulo cuyos lados (y por ende ángulos) son todos iguales, en la siguiente imagen se muestra que esta figura admite varios ejes de simetría, a saber, cada altura del triángulo (todas las cuales se topan en el centro del triángulo) funge de eje de simetría.



De nuevo, esto quiere decir que si reflejamos la imagen a lo largo de cada una de estas líneas obtenemos la misma imagen (el mismo triángulo equilátero).

No obstante, reflejar el triángulo a lo largo de los ejes de simetría no es la única *acción* que se puede realizar con el triángulo sin dejar de obtener el mismo dibujo. En efecto, si giramos el dibujo sobre su centro¹ un ángulo de $2\frac{\pi}{3}$, volvemos a obtener el mismo dibujo. Lo mismo ocurre girando un ángulo de $4\frac{\pi}{3}$ y de 2π (de hecho girar este ángulo es equivalente a no haber girado el triángulo en absoluto!).

Notamos así que las rotaciones y reflexiones descritas son acciones que se pueden realizar sobre el triángulo sin que se cambie el dibujo, de hecho, estas son **todas** las acciones que se pueden realizar con el triángulo que tienen esta propiedad. Para dar la idea del por qué de esta afirmación, agreguemos color a las puntas del triángulo.



De esta manera la rotación de $2\frac{\pi}{3}$ es la acción que mueve la punta azul a la posición de la roja y la de $4\frac{\pi}{3}$ la que mueve la punta azul a la posición de la verde. Aún más, las reflexiones son las acciones que intercambian cada par de puntas, mientras dejan la otra inmóvil.

Llamemos ahora ρ_1, ρ_2 a las rotaciones de $2\frac{\pi}{3}$ y $4\frac{\pi}{3}$, respectivamente y τ_1, τ_2, τ_3 a las reflexiones que dejan fijas las puntas roja, verde y azul, también respectivamente². A la rotación de 2π , (que es lo mismo que no haber hecho nada) la llamamos e y pongamos a todas estas letras en un conjunto

$$G = \{e, \rho_1, \rho_2, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}.$$

Una *palabra* de la forma

$$\rho_1 \tau_1 \tau_2 \rho_2$$

representa realizar las acciones correspondientes sobre el triángulo, una después de la otra.

¹En un triángulo equilátero todos los posibles “centros” coinciden y en el dibujo está representado por la intersección de todas las alturas.

²Más precisamente son las reflexiones respecto a los respectivos ejes de simetría.

Una característica notable de adoptar esta notación, es que sin importar qué palabra escribamos, ésta será siempre equivalente a una de las letras del conjunto G . Por ejemplo, la palabra descrita es equivalente a haber realizado solamente la acción ρ_1 .

Esta idea nos conduce a la noción matemática abstracta de **grupo**. Específicamente, un grupo es un conjunto G , sobre el cuál se define una operación binaria \cdot que cumple las siguientes propiedades:

1. (*Cerradura*) Para todo par de elementos $g, h \in G$, se cumple que la operación de h con g , $h \cdot g$ es un elemento de G .
2. (*Existencia del neutro*) Existe un elemento $e \in G$ tal que $e \cdot g = g \cdot e = g$ para cualquier $g \in G$.
3. (*Existencia del inverso*) Para cada elemento $g \in G$, existe otro elemento de G , que se nota g^{-1} , tal que $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$.
4. (*Asociatividad*) La operación es asociativa, es decir si $g, h, f \in G$ se cumple que $(g \cdot h) \cdot f = g \cdot (h \cdot f)$.

Es usual omitir el símbolo \cdot al escribir una cadena de operaciones, denotando estas operaciones como las palabras con letras elementos del conjunto. Con esto, es un ejercicio sencillo verificar que el conjunto G definido arriba es un grupo, de hecho, es un grupo lo suficientemente conocido (e importante) entre los matemáticos como para tener nombre propio, se lo conoce como grupo *diedral*.

1.2. De las simetrías a los grupos abstractos

El grupo descrito en la sección anterior describe las simetrías de un triángulo equilátero, o en otras palabras, de un polígono regular de 3 lados. Además, de la misma discusión determinamos que este grupo tiene 6 elementos. Esta relación entre el número de lados del polígono y el número de elementos del grupo se refleja en la notación usualmente usada para denotar este grupo. Específicamente, el grupo G explicado antes tiene por nombre D_6 , donde el 6 denota a la vez, el número de elementos del grupo y el hecho de que el polígono sobre el cuál *actúa* tiene 6/2 lados.

Siguiendo exactamente la misma línea de discusión para un cuadrado (polígono regular de 4 lados) llegaremos a un grupo de 8 elementos, que tiene por nombre D_8 . En general, para un n -ágono regular, su grupo de simetrías tendrá por nombre D_{2n} el cuál tendrá una cantidad de $2n$ elementos.

No es ningún secreto entonces que para polígonos grandes, escribir todos los elementos de estos grupos resultaría una tarea demasiado exhaustiva. Es aquí donde podemos ver una utilidad clara de la abstracción matemática, que nos permitirá simplificar la notación de estos grupos de manera significativa. Nos proponemos entonces utilizar la abstracción matemática para notar de manera más eficiente a los elementos de estos grupos, comencemos con el grupo ya conocido D_6 ; sabemos que este grupo consta de los elementos

$$D_6 = \{e, \rho_1, \rho_2, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}.$$

Volviendo a la concepción geométrica de las letras, es inmediato notar que si realizamos la misma reflexión dos veces seguidas el resultado final es lo mismo que no haber hecho nada, en términos de palabras con letras elementos del grupo esto es

$$\tau_1 \tau_1 = e; \quad \tau_2 \tau_2 = e; \quad \tau_3 \tau_3 = e.$$

Si admitimos la notación $\tau_1^2 := \tau_1 \tau_1$, podemos escribir

$$\tau_1^2 = \tau_2^2 = \tau_3^2 = e.$$

Similarmente podemos llegar a las relaciones³

$$\rho_1^3 = \rho_2^3 = e.$$

Ahora bien, un poco de pensamiento nos lleva también a determinar que

$$\rho_2 = \rho_1^2, \quad \tau_2 = \rho_1 \tau_1, \quad \tau_3 = \tau_1 \rho_1, \quad \rho_1 \tau_1 = \tau_1 \rho_1^{-1}.$$

³Note que estas relaciones implican que $\rho_1^{-1} = \rho_1^2$ y $\tau_1^{-1} = \tau_1$.

En términos matemáticos, esto significa que cualquier elemento del grupo D_6 se puede expresar usando solo los elementos ρ_1 y τ_1 . A esta situación se la expresa diciendo que los elementos ρ_1 y τ_1 son *generadores* del grupo D_6 y por tanto para expresar por completo a todos los elementos de este grupo, basta escribir los elementos generadores y las relaciones básicas que estos cumplen, precisamente escribimos:

$$D_6 = \langle \rho_1, \tau_1 : \rho_1^3 = e = \tau_1^2, \rho_1 \tau_1 = \tau_1 \rho_1^{-1} \rangle.$$

Note que esto significa que el grupo diedral D_6 está representado tan solo por **una rotación y una reflexión**. Es común nombrar⁴ a la rotación r y a la reflexión s , con lo que el grupo D_6 nos queda representado como

$$D_6 = \langle r, s : r^3 = s^2 = e, rs = sr^{-1} \rangle.$$

Nuevamente, si realizamos el mismo razonamiento con el cuadrado, obtendremos la representación de su grupo diedral, que es:

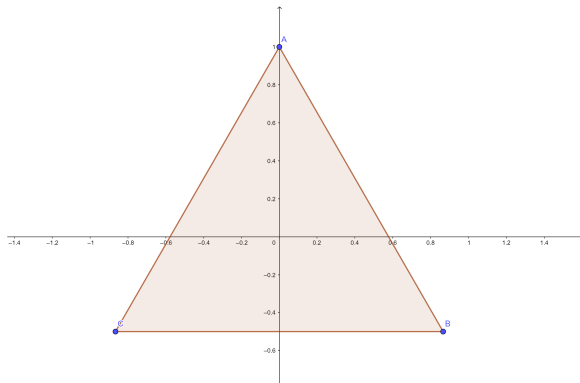
$$D_8 = \langle r, s : r^4 = s^2 = e, rs = sr^{-1} \rangle.$$

En general, un n -ágono regular tiene por grupo de simetrías el grupo

$$D_{2n} = \langle r, s : r^n = s^2 = e, rs = sr^{-1} \rangle.$$

1.3. De regreso a la geometría: simetrías de cuerpo rígido

Para aterrizar nuevamente las ideas notadas en la última sección, volvamos al triángulo, pero ahora considerémoslo un conjunto de puntos en el plano \mathbb{R}^2 . Para facilitar las cosas, consideremos además el origen de coordenadas en el centro del triángulo y los vértices en las coordenadas $(0, 1)$, $(\sqrt{3}/2, -1/2)$ y $(-\sqrt{3}/2, -1/2)$.



Del álgebra lineal sabemos que la rotación de un ángulo θ sobre \mathbb{R}^2 , se representa como una matriz 2×2 de la forma

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

En efecto, se puede comprobar de manera directa que cuando tomamos $\theta = \frac{2\pi}{3}$, la matriz actúa sobre los vértices del triángulo (vistos ahora como puntos coordenados) de la manera esperada. Así llegamos a que la rotación r , se representa en \mathbb{R}^2 como

$$r = \begin{bmatrix} \cos(\frac{2\pi}{3}) & -\text{sen}(\frac{2\pi}{3}) \\ \text{sen}(\frac{2\pi}{3}) & \cos(\frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

No es difícil mostrar que esta matriz cumple la propiedad de la rotación r , esto es $r^3 = e$.

Encontremos ahora la matriz que representa la reflexión s . La posición del triángulo sobre los ejes coordenados nos sugiere utilizar al eje y como eje de simetría, por lo que la matriz buscada debe actuar de la manera siguiente: cuando actúe sobre el punto⁵ $(1,0)$, este debería “moverse” hacia el punto $(-1,0)$, mientras que cuando la misma

⁴La notación se puede justificar diciendo que la r viene de “rotación” por algún ángulo y la s de “simetría” respecto de un eje de simetría.

⁵Tomamos este punto por facilitar cálculos, pero podríamos escoger sin problema uno de los vértices del triángulo.

matriz actúe sobre el punto $(0,1)$, este debería mantenerse inmóvil.

Una cuenta sencilla nos permite determinar que la matriz buscada es

$$s = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Al igual que antes no es difícil mostrar que las propiedades necesarias ($s^2 = e$, $rs = sr^{-1}$) se cumplen.

Ahora consideremos el triángulo como un objeto rígido, por ejemplo un recorte de papel, que yace sobre una superficie lisa, por ejemplo una mesa, y para facilitar visualización volvamos a pensar en los vértices con colores como en la figura en la Sección 1.1.

Adoptemos que la rotación r es la de ángulo $\frac{2\pi}{3}$ y la reflexión s es la que deja fijo el vértice rojo. Note que al aplicar r sobre el triángulo, el recorte de papel nunca deja de tocar la mesa, mientras que para aplicar s , es **totalmente necesario** levantar el papel de la mesa y volverlo colocar sobre la misma!

Este último párrafo nos muestra que la concepción del triángulo como objeto geométrico **sólido**, cambia dependiendo de la *acción* que queramos realizar sobre él. Más precisamente, si consideramos solo rotaciones ($r, r^2, r^3 = e$) podemos pensar en el triángulo como un objeto puramente *bidimensional* (que “vive” solo en el plano), mientras que si consideramos reflexiones ($s, s^2 = e$) estamos “obligados” a concebir el triángulo como objeto *tridimensional* (que “vive” en el espacio).

Esta discrepancia nos lleva al concepto de *simetría de sólido rígido*, que de manera informal, son las simetrías que se pueden obtener moviendo el cuerpo **sólo** dentro del espacio en el que está incrustado. Puntualmente, si consideramos al triángulo como un sólido del plano \mathbb{R}^2 las simetrías de cuerpo rígido son solo las rotaciones, pero si lo consideramos como un sólido en \mathbb{R}^3 , podemos también admitir reflexiones.

Un resultado interesante es que las matrices calculadas al inicio de la sección tienen embebida en su estructura esta diferencia, específicamente a través de su determinante. En efecto, un cálculo directo muestra que la matriz correspondiente a la rotación tiene determinante igual 1 –note que esto funciona para cualquier ángulo θ , no solo para $\frac{2\pi}{3}$!– mientras que la matriz correspondiente a la reflexión tiene determinante igual a -1.

Siguiendo el mismo razonamiento anterior, un rato de pensamiento es suficiente para convencerse de que para cualquier n -ágono regular, el grupo de simetrías D_{2n} estará generado por

$$r = \begin{bmatrix} \cos(\frac{2\pi}{n}) & -\sin(\frac{2\pi}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi}{n}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) \end{bmatrix}, \quad s = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ya que el determinante de **cualquier** matriz de rotación es igual a 1, independientemente de el ángulo a rotar, tenemos que las *simetrías de cuerpos rígidos* en el plano serán aquellas **de determinante igual 1**, es decir, las rotaciones.

Si consideramos al n -ágono como un conjunto de puntos del plano, podemos ver que si tomamos un punto que pertenezca al n -ágono, su imagen bajo las matrices r o s , vuelve a caer dentro del n -ágono. Así podemos considerar a las simetrías como funciones que envían al n -ágono en sí mismo, es decir, si llamamos \mathcal{X} al conjunto de puntos que definen el n -ágono, tenemos las funciones

$$r : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \quad \text{y} \quad s : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}.$$

Más adelante veremos como la noción de simetría se puede generalizar para otros objetos geométricos definidos de manera abstracta.

Los grupos definidos en la Sección 1.2 son estructuras algebraicas abstractas por sí mismas y pueden ser estudiadas sin necesidad de pensar en la relación que guardan con los objetos geométricos con los que comenzamos la discusión.

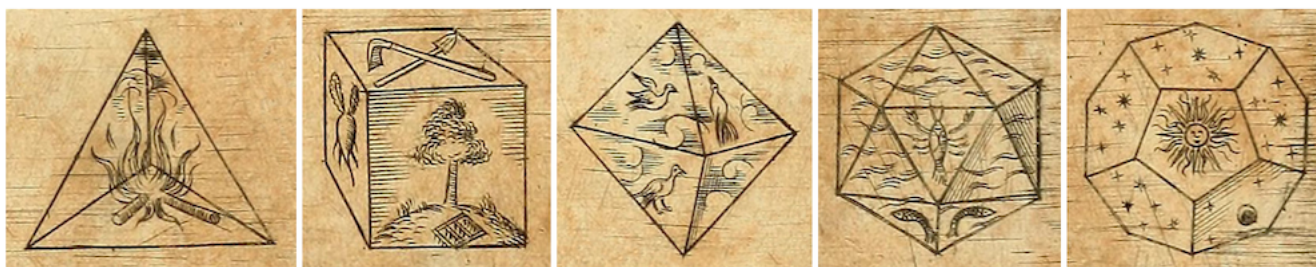
Formalmente se dice que el grupo diedral D_{2n} *actúa* sobre el correspondiente n -ágono regular. La *acción* de un grupo sobre un conjunto es una definición abstracta que se puede generalizar para cualquier grupo y cualquier conjunto, en las secciones finales notaremos como esta noción da origen a un tipo especial de objeto geométrico que es de gran interés para la geometría algebraica moderna.

2. La tercera dimensión: Los sólidos Platónicos

La generalización de la discusión anterior al espacio tridimensional se da a través del concepto de *poliedro*. Partiendo del hecho que un polígono es una superficie limitada por líneas rectas, un poliedro será un **sólido limitado por superficies planas**.

Los análogos de los polígonos regulares, son los famosos *sólidos platónicos* (también llamados regulares o perfectos), que son poliedros convexos tal que todas sus caras son polígonos regulares iguales entre sí, y en que todos los ángulos sólidos son iguales. Dichos sólidos reciben su nombre del filósofo griego Platón, quien los describiría en su libro “Timeo”.

A Platón se le acredita el haber reconocido un hecho realmente notable: tan solo existen **cinco** poliedros que cumplen esta definición, a saber: *el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro*. Tan impresionante fue este resultado para la época, que el mismo Platón no atinó a más que interpretarlo como una pista de cómo funcionaba el universo. Específicamente, Platón consideró que cada sólido debía estar relacionado con cada uno de los 4 “*elementos de la naturaleza*”: agua, tierra, aire, fuego. Aun más, el quinto sólido quedó asociado a la estructura misma del universo, en palabras de Platón: “dios lo usó como patrón para bordar las constelaciones sobre los cielos”.

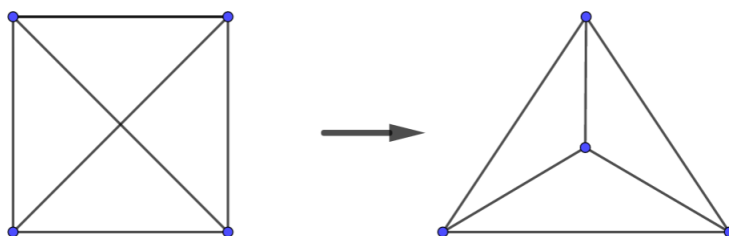


A pesar de que la relación entre los sólidos y los elementos mencionados ha caído ya en el olvido hace tiempo (al menos por la ciencia). El hecho de que solo existan 5 tales sólidos ha sido un hecho que ha maravillado e intrigado a los matemáticos a lo largo de los siglos. Numerosas demostraciones se han presentado de este hecho, en la próxima sección nos proponemos exponer una de estas demostraciones.

2.1. Característica de Euler y grafos planares

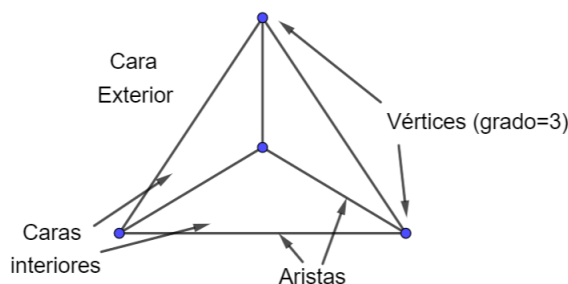
La demostración que nos proponemos exponer, requerirá de un poco de grafos y su relación con los poliedros a través de la afamada *Característica de Euler*. Comenzamos entonces presentado estas nociones.

Un *grafo* es sencillamente un conjunto de vértices unidos por aristas. Un grafo *planar* será un grafo cuyos vértices pueden ser arreglados sobre el plano de manera que las aristas solo se intersequen en vértices comunes.



Grafo Planar

Dado un grafo planar G , notemos por $V(G)$ su conjunto de vértices y por $E(G)$ su conjunto de aristas. Definamos además el conjunto de *caras* del grafo $F(G)$ como el conjunto de partes bidimensionales en las que G divide al plano⁶. Cuando no haya lugar a confusión respecto del grafo al que nos estamos refiriendo, notaremos sencillamente V , E y F . Definimos el *grado* de un vértice como la cantidad de aristas que salen de él.



⁶Consideramos tanto las partes encerradas por aristas de G (caras interiores), como la que queda por fuera de G (cara exterior).

Un grafo se llamará *conexo* si todos sus vértices están conectados en el sentido de que si partimos desde un vértice y seguimos las aristas, siempre habrá un camino que nos conduzca a cualquier otro vértice. Asociamos dos definiciones a los grafos planares conexos: la *Característica de Euler* y el *Ciclo Euleriano*.

La característica de Euler es sencillamente la cantidad

$$V - E + F$$

donde V , E y F están definidos como arriba.

Un Ciclo Euleriano, se define como un camino que comienza y termina en un mismo vértice, mientras pasa por todos los vértices del grafo recorriendo cada arista una sola vez. Que un grafo tenga tal camino no es trivial, por ejemplo el grafo de última figura no tiene ningún ciclo Euleriano. Así, tenemos el primer teorema a probar.

Teorema 1. *Un grafo tiene un Ciclo Euleriano si y solo si, es conexo y todos sus vértices tienen grado par.*

Demostración. Comenzamos suponiendo que el grafo tiene un Ciclo Euleriano, probemos que sus vértices tienen grado par. Para esto, supongamos que el ciclo parte de un vértice v_0 de la siguiente manera:

$$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \cdots \rightarrow v_k \rightarrow \cdots \rightarrow v_{n-1} \rightarrow v_0$$

donde v_k es el k -ésimo vértice visitado durante el ciclo. Note que un Ciclo Euleriano puede visitar el mismo vértice más de una vez, esto es, v_i puede aparecer más de una vez en el esquema de arriba. Ya que el ciclo debe visitar todos los vértices, es necesario que G sea conexo.

Ahora bien, ya que cada arista se recorre solo una vez, para cada vértice v se recorren todas las aristas que llegan a (o salen de) este, y además, por cada vez que v aparece en el ciclo, se cuentan **dos** aristas, una de “llegada” y otra de “salida”; entonces el grado del vértice se puede calcular como

$$\text{deg}(v) = 2 \cdot \#\{i \in [0, n - 1] : v_i = v\}.$$

De donde el grado es par.

Recíprocamente, supongamos un grafo G con $\text{deg}(v)$ par para todo $v \in G$. Procedemos por inducción sobre el número de aristas.

Para $n = 0$ y $n = 2$, el resultado es trivial. Supongamos por hipótesis de inducción que el resultado es válido para todo $n < 2k$ par, sea G un grafo con $2k$ aristas. Nos ubicamos en un vértice v_0 y comenzamos a recorrer el grafo nombrando v_i al i -ésimo vértice visitado durante el camino; cada vez que recorremos una arista, la borramos del grafo y continuamos así hasta que nos estancamos en un vértice sin aristas para continuar.

Ya que todos los vértices tienen grado par, este vértice tiene que ser el mismo v_0 . En efecto, para cada vértice que no es v_0 debimos haber llegado y salido una vez, ya que el grado es par, por cada llegada debe haber una salida, entonces podemos salir de cualquier vértice que no sea v_0 .

Ahora, después de haber terminado el recorrido, hemos dejado varios grafos (subgrafos de G) disjuntos. Como cada vértice se visitó solo una vez, todos los vértices tienen grado par y por hipótesis de inducción tienen un Ciclo Euleriano. Construimos así un Ciclo Euleriano para el grafo G partiendo de v_0 , siguiendo el camino de antes, pero realizando el ciclo Euleriano de cada subgrafo cuando lleguemos a un vértice de éste y continuando al siguiente subgrafo. ■

Ahora que hemos caracterizado a los grafos que tienen un camino Euleriano, podemos expresar el resultado principal de esta sección, que relaciona la característica de Euler, con estos grafos.

Proposición 1. *La característica de Euler tiene valor 2, para todo grafo que tiene un Ciclo Euleriano. Esto es, si G tiene un Ciclo Euleriano, entonces*

$$V - E + F = 2.$$

Demostración. Consideremos un Ciclo Euleriano

$$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \cdots \rightarrow v_k \rightarrow \cdots \rightarrow v_{n-1} \rightarrow v_0. \tag{1}$$

En este esquema cada vértice aparece al menos una vez, pero puede aparecer más veces. Para un vértice v , sea $r(v)$ el número de veces que este vértice es revisitado durante el ciclo; buscamos calcular -de dos maneras distintas- la cantidad

$$\sum_{v \in V} r(v).$$

Primero notemos que, ya que el esquema 1 muestra todo el ciclo, la cantidad buscada será el número total de vértices que aparecen en 1 menos V . Ahora, cada vértice de 1 tiene una flecha de llegada, a excepción de v_0 al inicio del ciclo. Entonces, la cantidad de vértices que aparecen en 1 es el **número de flechas +1**, pero como cada arista se recorre una sola vez, el número de flechas debe ser igual a E . Resumiendo, esto significa que:

$$\sum_{v \in V} r(v) = E + 1 - V.$$

Por otro lado, cada revisita a un vértice, forma una cara interna. Recordemos que F cuenta también la cara exterior, entonces la suma buscada tiene que ser

$$\sum_{v \in V} r(v) = F - 1.$$

Igualando los lados derechos tenemos

$$E + 1 - V = F - 1 \Leftrightarrow V - E + F = 2.$$

Lo que termina la demostración. ■

Combinando estos resultados, podemos probar de manera relativamente sencilla el teorema más importante de esta sección.

Teorema 2. *Para cualquier grafo conexo se tiene que $V - E + F = 2$.*

Demostración. Sea G un grafo conexo, formemos otro grafo G' a partir de G de la siguiente manera: por cada arista, dibujamos otra arista paralela a ésta. Note que G' tiene el doble de aristas que G , por tanto cada vértice de G' tiene grado par, además, por cada arista que se añade, se suma una cara más, de aquí que la característica de Euler de G' sea la misma que la de G , en efecto:

$$V(G') - E(G') + F(G') = V(G) - 2E(G) + [F(G) + E(G)] = V(G) - E(G) + F(G).$$

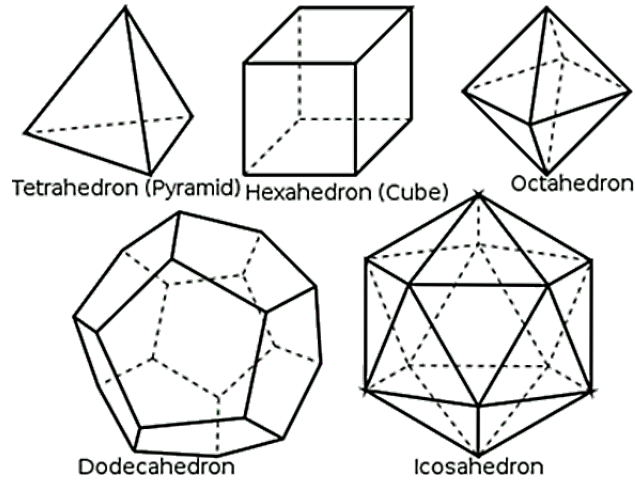
Ahora bien, como todos los vértices de G' tienen grado par, por la proposición 1, G' tiene un Ciclo Euleriano. Luego, por el teorema 1 se sigue que

$$V(G') - E(G') + F(G') = V(G) - E(G) + F(G) = 2. ■$$

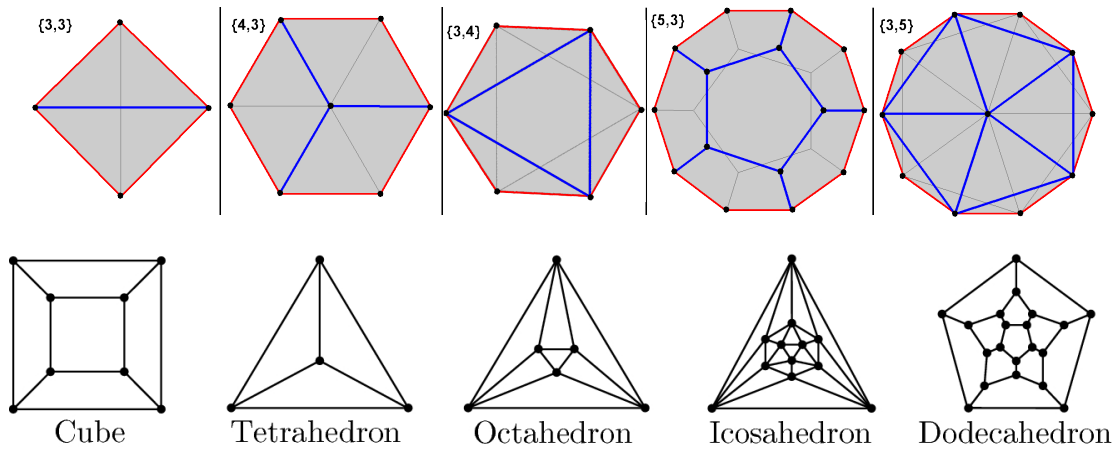
2.2. Existencia de sólo 5 sólidos Platónicos

Una vez que hemos introducido la Característica de Euler y su relación con los grafos planares, el siguiente paso será relacionar estos conceptos con los sólidos Platónicos.

Esta relación resulta más sencilla de lo que podría parecer en un principio. En efecto, si vemos a un sólido en transparencia, tenemos un conjunto de aristas que unen vértices, esto claramente sugiere un grafo.



Ahora proyectemos esta imagen sobre el plano, así obtenemos un grafo, cuyos vértices podemos reorganizar de manera que cada par de aristas, se intersequen solo en vértices comunes, es decir, un grafo planar.



Es lógico que el número de aristas y vértices se mantienen en el grafo planar asociado a cada sólido, aún más, el número de caras (contando la cara exterior) también se mantiene. Podemos decir entonces que *la característica de Euler de un sólido platónico* será

$$V - E + F = 2.$$

Y ya estamos listos para probar el teorema que nos habíamos propuesto demostrar al inicio de la sección.

Teorema 3. *Hay solo 5 sólidos platónicos.*

Demostración. Consideremos un sólido platónico, cuyas caras tienen n lados y cuyos vértices tienen grado m . Contemos el número de aristas de la siguiente manera: el sólido tiene F caras y cada cara tiene n lados, estaríamos tentados a contar el número de aristas como nF , pero si contamos sencillamente nF , estamos contando cada arista dos veces (pues cada arista pertenece a exactamente dos caras), entonces

$$nF = 2E.$$

Por otro lado, en cada vértice se intersecan m aristas, si contamos mV nuevamente estamos contando cada arista dos veces, entonces

$$mV = 2E.$$

Reemplazando V y F en la fórmula de la característica de Euler, tenemos

$$\frac{2E}{m} - E + \frac{2E}{n} = 2$$

que nos da

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{E}. \tag{2}$$

Ahora notemos que el lado derecho es estrictamente mayor a un medio, por lo que n y m no pueden ser ambos mayores a 3 la vez, pues en este caso el lado izquierdo no podría superar $\frac{1}{2}$ y la igualdad sería imposible.

Supongamos primero $m = 3$, entonces la ecuación 2 se convierte en

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{6-n}{6n},$$

como el lado izquierdo es positivo, vemos que $n \leq 5$.

Si $n = 5$, las caras son pentágonos y además

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{30} \Rightarrow E = 30 \Rightarrow F = 12, \Rightarrow V = 20,$$

que corresponde al dodecaedro.

Si $n = 4$, las caras son cuadrados y además

$$\frac{1}{E} = \frac{2}{24} \Rightarrow E = 12 \Rightarrow F = 6, \Rightarrow V = 8,$$

que corresponde al cubo.

Si $n = 3$, las caras son triángulos y además

$$\frac{1}{E} = \frac{3}{18} \Rightarrow E = 6 \Rightarrow F = 4, \Rightarrow V = 4,$$

que corresponde al tetraedro.

Como n no puede ser menor a 3, pues las caras deben ser polígonos, estos son todos los casos para $m = 3$.

Ahora supongamos $n = 3$, de manera que todas las caras son triángulos, entonces la ecuación 2 se convierte en

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{m} - \frac{1}{6} = \frac{6-m}{6m},$$

igual que antes $m \leq 5$.

Si $m = 5$, tenemos

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{30} \Rightarrow E = 30 \Rightarrow V = 12, \Rightarrow F = 20,$$

que corresponde al icosaedro.

Si $m = 4$, tenemos

$$\frac{1}{E} = \frac{2}{24} \Rightarrow E = 12 \Rightarrow V = 6, \Rightarrow F = 8,$$

que corresponde al octaedro.

Si $m = 3$, tenemos

$$\frac{1}{E} = \frac{3}{18} \Rightarrow E = 6 \Rightarrow V = 4, \Rightarrow F = 4,$$

que corresponde al tetraedro.

Como m no puede ser menor a 3, pues de otra manera no tendríamos un sólido, estos son todos los casos para $m = 3$ y se sigue que son los únicos sólidos platónicos. ■

2.3. Dualidad de sólidos Platónicos

La demostración presentada en la sección anterior hace uso extensivo de la cantidad de vértices, aristas y caras de cada sólido; este fue el enfoque del matemático Leonard Euler para analizar los poliedros.

Euler consideró que estos eran los elementos principales para caracterizar a un poliedro, aún por encima de sus características “medibles”, tales como la longitud de sus aristas, la superficie de sus caras o la magnitud de sus ángulos. Es así que definió la cantidad $V - E + F$ que además está decir, toma su nombre de este célebre matemático.

Ahora bien, si aceptamos que estas son las características principales de cada sólido, tiene sentido hacer una tabla con estas cantidades.

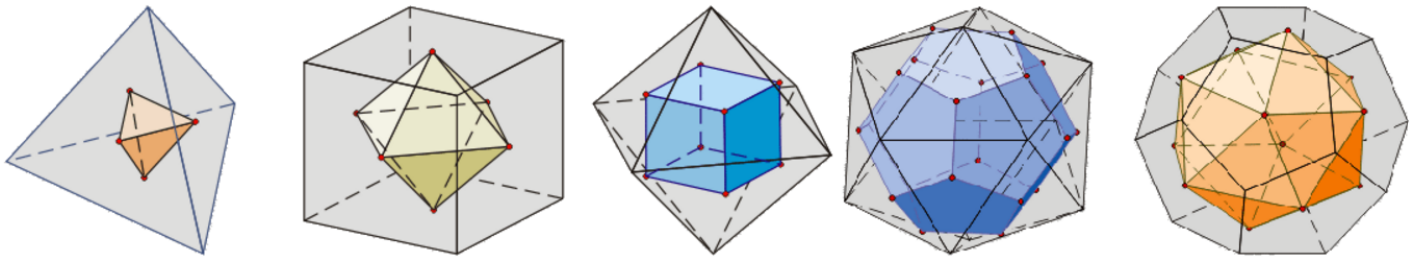
Sólido	V	E	F
<i>Tetraedro</i>	4	6	4
<i>Cubo</i>	8	12	6
<i>Octaedro</i>	6	12	8
<i>Icosaedro</i>	12	30	20
<i>Icosaedro</i>	20	30	12

De inmediato se nota que la tabla sugiere un patrón, a saber, el cubo y el octaedro intercambian su número de vértices y caras; lo propio ocurre con el icosaedro y el dodecaedro.

Esta observación conduce a una noción de *dualidad* entre los sólidos platónicos, la cual tiene también una interpretación puramente geométrica como se describe a continuación.

Dado un sólido platónico, construimos otro sólido de la manera siguiente: ubicamos el punto medio de cada cara y sobre este plantamos un vértice del nuevo sólido, posteriormente, trazamos las aristas entre cada par de vértices que estén en caras contiguas del poliedro original, formando un nuevo poliedro.

Siguiendo esta construcción cada cara del poliedro dual se corresponde con un vértice del original, lo cual cumple la noción de dualidad dada por la tabla. Más aún, si tomamos el dual del dual de un poliedro, volvemos al poliedro original.



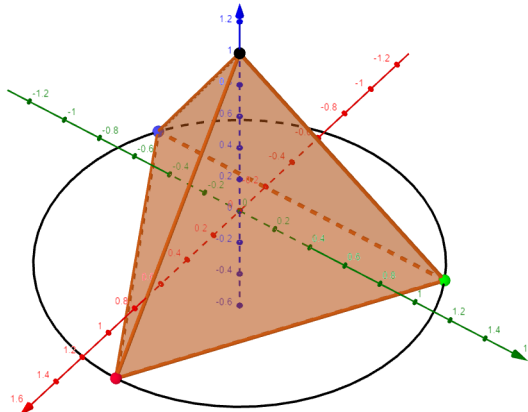
Cabe recalcar que es posible pensar en una construcción análoga para los polígonos planos, en este caso deberíamos tomar los puntos medios de cada arista y luego unir los puntos de caras contiguas con nuevas aristas. No obstante, ya que todo n -ágono regular tiene el mismo número de vértices que de aristas, el polígono dual que obtenemos será igual al original; por esta razón, la dualidad usualmente se considera sólo para sólidos tridimensionales.

3. Grupos de automorfismos de sólidos platónicos

3.1. Las complicaciones de la tercera dimensión

El paso a tres dimensiones de la discusión precedente presenta las complicaciones debidas a tener un grado más de libertad. Consideremos por ejemplo un tetraedro en el espacio tridimensional como se muestra en la siguiente figura,⁷ con los vértices en los puntos

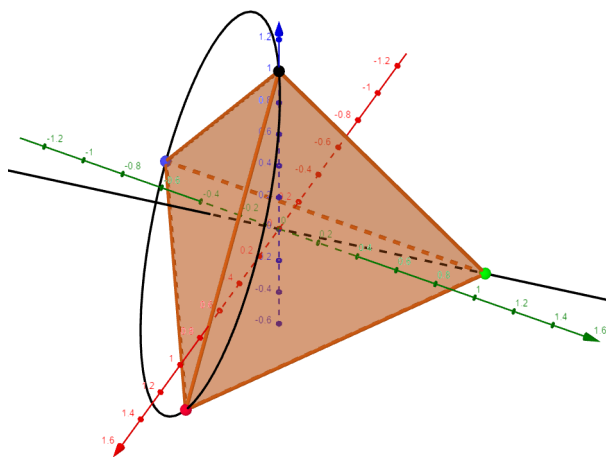
$$(0, 0, 1); \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{1}{3}\right); \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{1}{3}\right); \left(-2\frac{\sqrt{2}}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right).$$



⁷La circunferencia se añade solo para facilitar visualización de las rotaciones descritas.

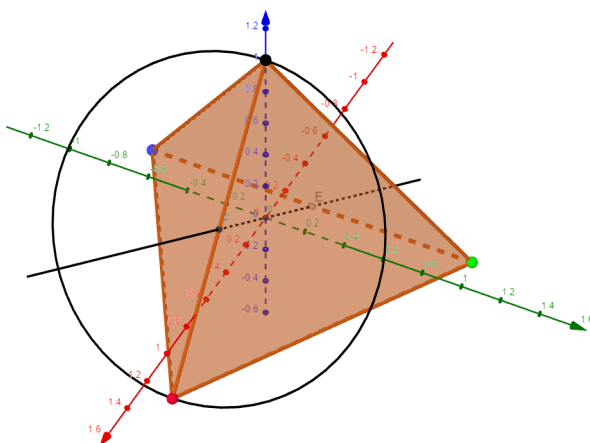
La base del tetraedro no es más que un triángulo equilátero. Esto significa que colocamos este triángulo de manera que el eje z cruce por su centro, tendremos las simetrías de rotación del triángulo, que a su vez ocasionan 3 simetrías (incluida la trivial) para el tetraedro. En efecto, la rotación que envía el vértice naranja a la posición del verde mantiene, no solo el triángulo base invariante, sino a todo el tetraedro y lo mismo sucede para la simetría que envía el vértice naranja al azul.

Ahora bien, ésta está lejos de ser la única manera de rotar el tetraedro con un eje de giro. Por ejemplo si tomamos la cara de los vértices naranja, negro y azul, veremos que podemos trazar otro eje de rotación que cruce por el vértice verde.



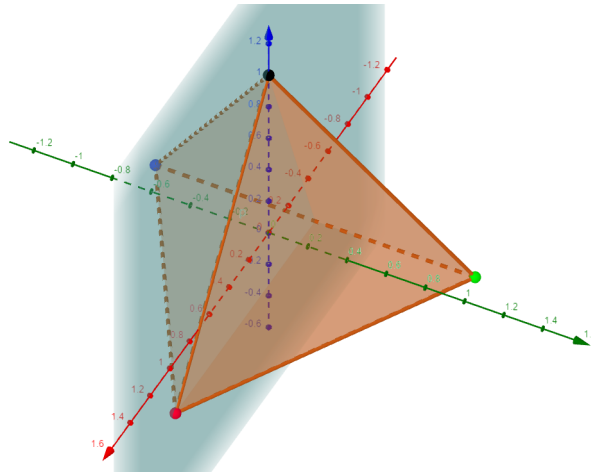
Este nuevo eje de rotación da 3 rotaciones más que también son simetrías del tetraedro. Específicamente una que envía el vértice naranja a la posición del negro y otra que envía el naranja al verde, a parte de la trivial. Podemos repetir esto con todas las otras caras del tetraedro, obtenemos así que existen al menos $4 \times 3 = 12$ rotaciones para el tetraedro.

Ahora tracemos una recta que une el punto medio de la arista que une los vértices verde y azul, con el punto medio de la arista que une los vértices rojo y negro. Esta recta es un nuevo eje de rotación para una simetría del tetraedro, en específico esta rotación es la que envía el vértice naranja a la posición del negro.



Esto se puede repetir con cada par de aristas opuestas, lo que nos da, aparentemente, 3 rotaciones más. Sin embargo, una observación detallada muestra que es posible replicar la última rotación explicada por dos de las rotaciones explicadas antes, una seguida después de la otra. En efecto, si consideramos primero la rotación que intercambia el vértice naranja con el negro –bajo el eje de rotación que cruza el vértice verde– y ya con el vértice naranja en el eje azimutal, movemos el vértice negro a la posición del azul, obtenemos la misma rotación mostrada en la última figura.

Aún más, si consideramos un plano que contenga una arista y sea perpendicular a la cara opuesta, tenemos otro tipo de simetrías más. Estas serán reflexiones del tetraedro respecto de este tipo de planos.



Para contar el número de simetrías del tetraedro debemos considerar todas las posibles *composiciones* de las simetrías explicadas (una simetría aplicada luego de la otra), que podemos ver que resulta considerablemente más complejo que en el caso en dos dimensiones. Con este objetivo, planteamos echar mano nuevamente de la noción de grupo.

3.2. El grupo Simétrico y los vértices del tetraedro

En la Sección 1.2 se introdujo el grupo diedral como el grupo que describía las simetrías de un n -ágono. Ahora nos proponemos introducir otro grupo que nos ayudará contar (y en última instancia también describir) las simetrías del tetraedro.

Consideremos un conjunto con 4 elementos. Por facilidad podemos nombrar a estos elementos con los números del 1 al 4

$$H = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Una función biyectiva de H en H es sencillamente una permutación de los elementos de H . Al tener un número finito de elementos, existen un número finito de estas funciones. Además, las biyecciones forman un grupo cuya operación es la composición.

En efecto, la composición de dos biyecciones es una biyección, la función identidad es una biyección que funge de neutro y la inversa de una biyección es también una biyección.

Este grupo se llama el *grupo simétrico de 4 elementos* y se lo nota por S_4 . La cantidad de elementos de este grupo se cuenta fácilmente contando la cantidad de posibles permutaciones con 4 elementos

$$\#S_4 = 4!.$$

Ahora notemos lo siguiente, como habíamos dicho antes, una simetría puede ser entendida como una función que envía el objeto simétrico en sí mismo. Por ejemplo, considerando cualquiera de las simetrías descritas en la subsección anterior y al tetraedro como un conjunto de puntos en el espacio \mathbb{R}^3 , vemos que los puntos del tetraedro se mantienen dentro del mismo espacio del tetraedro después de aplicar la simetría.

En particular, la imagen de un vértice del tetraedro es siempre otro vértice. Esto quiere decir que si nombramos los vértices del tetraedro con los números del 1 al 4, obtenemos el conjunto

$$H = \{1, 2, 3, 4\}$$

de antes.

Visto de esta manera, una simetría del tetraedro no es más que una permutación de los vértices del mismo. Así intuimos que las simetrías del tetraedro guardan relación con el grupo S_4 y quizá conociendo este grupo podremos contar de manera más fácil las simetrías del tetraedro.

3.3. Subgrupos de un grupo

Dado un grupo (G, \cdot) , en ocasiones podemos encontrar un grupo más pequeño contenido en este. Esta situación se expresa diciendo que G tiene un subgrupo. Formalmente, un subconjunto $H \subset G$ se dice un grupo si al restringir la operación \cdot a H se obtiene que (H, \cdot) es un grupo y en este caso escribimos

$$H < G.$$

En particular $e \in H$ y si $h \in H$ entonces $h^{-1} \in H$.

Como ejemplo tomemos, para un grupo cualquiera G , el conjunto unitario del neutro, es decir,

$$H = \{e\} \subset G.$$

Entonces (e, \cdot) es un grupo.

En efecto, la única operación posible es

$$e \cdot e = e \in H$$

y además e es su propio inverso y el elemento neutro de H .

También podemos ver que si tomamos $H = G$ se cumple la definición de subgrupo, es decir G es un subgrupo de sí mismo.

La cardinalidad de un subgrupo guarda estrecha relación con la cardinalidad del grupo que lo contiene. Este resultado es de suma utilidad para contar el número de elementos de un grupo y, en nuestro caso, nos servirá para contar las simetrías del tetraedro.

Teorema 4. Sean G un grupo y $H < G$ un subgrupo de G . Entonces, la cardinalidad de H divide a la cardinalidad de G , esto es,

$$\#H \mid \#G \Leftrightarrow \#G = M \cdot \#H,$$

con $M \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Sea H un subgrupo de G , definimos sobre G la *relación de equivalencia*

$$g \sim g' \Leftrightarrow \exists h \in H \text{ tal que } g' = hg.$$

Esta relación es de equivalencia directamente por su definición. En efecto, como $e \in H$ entonces todo $g \sim g$, lo que prueba la *reflexividad*. Como para todo $h \in H$ se tiene que $h^{-1} \in H$ la *simetría* se sigue de

$$g \sim g' \Leftrightarrow g' = hg \Leftrightarrow h^{-1}g' = g \Leftrightarrow g' \sim g.$$

Por último, la *transitividad* se da por

$$g \sim g' \sim g'' \Leftrightarrow g' = h_1g \text{ y } g'' = h_2g' \Rightarrow g'' = h_2(h_1g) = hg \Rightarrow g \sim g''.$$

Para un elemento $g \in G$, su *clase de equivalencia* es el conjunto

$$[g] = \{g' : g' \sim g\} = \{g' : g' = hg, h \in H\}.$$

Definimos G/H como el conjunto de clases de equivalencia, es decir,

$$G/H = \{[g] : g \in G\}.$$

Nos proponemos mostrar que todas las clases de equivalencia tienen la misma cardinalidad.

Sean $g, g' \in G$, definimos una función φ por

$$\varphi : [g] \rightarrow [g'], \quad hg \mapsto hg'.$$

Esta función es inyectiva, pues si $h_1g, h_2g \in [g]$, tenemos

$$\varphi(h_1g) = \varphi(h_2g) \Leftrightarrow h_1g' = h_2g' \Rightarrow h_1 = h_2 \Rightarrow h_1g = h_2g$$

y es sobreyectiva pues, para todo $hg' \in [g']$, tenemos que

$$\varphi(hg) = hg'.$$

Entonces φ es una biyección y tenemos que

$$\#[g] = \#[g'] \quad \forall g \in G.$$

En particular,

$$\forall g \in G \#[g] = \#[e] = \#H.$$

Ahora, se sigue que

$$\begin{aligned} \#G &= \#(G/H) \times \#[g] \quad \text{con } g \in G, \\ &\Rightarrow \#G = \#(G/H) \times \#H, \\ &\Rightarrow \#H \mid \#G, \quad M = \#(G/H). \end{aligned}$$

■

3.4. Las simetrías del tetraedro

Ahora regresemos al tetraedro. Habíamos formado el conjunto $H = \{1, 2, 3, 4\}$ de los vértices del tetraedro y vimos que, desde esta perspectiva, las simetrías podían ser vistas como permutaciones de los vértices.

Ya que la imagen de un vértice es siempre un vértice, tenemos que el conjunto de simetrías es en realidad una biyección del conjunto de vértices en sí mismo, es decir, una permutación del conjunto H .

Pero las permutaciones de cuatro elementos forman el grupo S_4 , entonces tenemos que

$$H \subset S_4.$$

Más aún, la naturaleza misma de las simetrías garantiza que (H, \cdot) es un grupo, es decir,

$$H < S_4.$$

Del teorema 4 sabemos que la cardinalidad de H debe dividir a $\#S_4 = 24$. Ahora, contamos un total de 12 rotaciones, en efecto, un rato de pensamiento nos lleva a ver que todas las rotaciones se definen como composiciones de las primeras rotaciones descritas (con un eje que pasa por un vértice y el punto medio de la cara opuesta).

Sin embargo, si tomamos una reflexión respecto de un plano como habíamos descrito, esta simetría **no puede ser descrita como composición de rotaciones!**, esto quiere decir que existen **al menos** 13 simetrías, pero del párrafo anterior vemos que este número no es admisible (no divide a 24), entonces la única opción es que sean un total de 24 simetrías. Esta discusión ha probado el siguiente teorema.

Teorema 5. *El grupo de simetrías del tetraedro es S_4 .*

Para terminar esta sección, presentamos la representación matricial de un par de simetrías del tetraedro.

Es lógico que las rotaciones en \mathbb{R}^3 dependen de su eje de rotación. Es claro que el eje de rotación es una recta que permanece invariante al aplicar la rotación, el complemento ortogonal de esta recta es el plano que tiene como vector normal al vector director de la recta. Si consideramos una base ortonormal que contenga este vector unitario, se sigue que la rotación analizada es lo mismo que una rotación en 2 dimensiones, solo sobre un plano distinto.

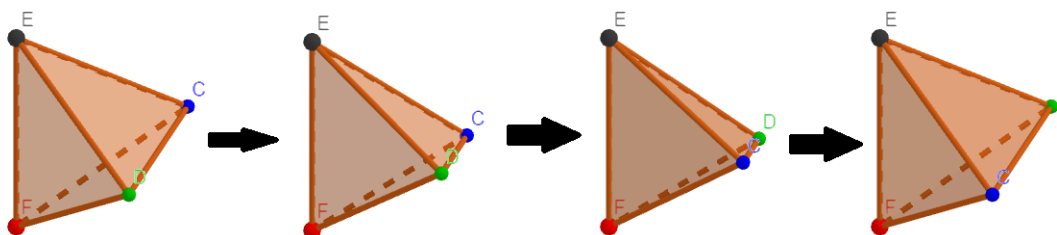
Para el tetraedro considerado al inicio de este capítulo, un eje de rotación es justamente el eje z , así que la matriz de rotación correspondiente debe mantener la tercera coordenada de los puntos inmóvil, mientras rota el plano xy , por tanto, la matriz que describe esta rotación es

$$r = \begin{bmatrix} \cos(\frac{2\pi}{3}) & -\text{sen}(\frac{2\pi}{3}) & 0 \\ \text{sen}(\frac{2\pi}{3}) & \cos(\frac{2\pi}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En la misma base, haciendo un cálculo muy parecido al hecho en dos dimensiones obtenemos que la matriz que representa la reflexión es

$$s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Basta realizar el cálculo directo para notar que los determinantes cumplen la misma propiedad que en dos dimensiones, $\det(r) = 1$ y $\det(s) = -1$. Aún más, la diferencia “física” entre la rotación y reflexión es incluso más notable en 3 dimensiones, pues en este caso no tenemos una dimensión extra (visible) a donde “sacar” el tetraedro para poder realizar la reflexión, por ende el movimiento solo se puede mostrar causando una auto intersección.



De esta manera, vemos que nuevamente el concepto de simetría de cuerpo rígido tiene sentido y que al igual que en caso bidimensional, estas simetrías son justamente las rotaciones, que, al concebirlas como transformaciones lineales representadas por una matriz, están caracterizadas por su determinante

3.5. Caracterización de los sólidos por sus grupos de simetrías

En esta sección hicimos un uso un poco más profundo del álgebra para calcular las simetrías de un objeto geométrico. Una de las razones para preocuparnos tanto por las simetrías, es saber si el grupo de simetrías determina de alguna manera al objeto geométrico sobre el cuál actúa.

El grupo diedral por ejemplo está estrechamente relacionado con el n -ágono sobre el cuál actúa. Nos podremos preguntar entonces, si existe una relación así de estrecha con las simetrías de los sólidos.

El cálculo de los grupos de simetría del resto de sólidos es aún más complejo que el del tetraedro que aquí hemos presentado y no es el objetivo del curso, incluso para presentarlos sería necesario definir más términos de álgebra abstracta, por lo que no los presentaremos. Sin embargo, sí podemos hacer una observación respecto de cuánto caracterizan las simetrías a los sólidos platónicos.

En la Sección 2.3 se exhibió la dualidad de los sólidos platónicos. De la figura allí presentada, es obvio que las simetrías de cada sólido afectan de la misma manera a su sólido dual. Es decir, los sólidos platónicos **no están caracterizados por su grupo de simetrías**. A lo más se puede pedir una caracterización, módulo dualidad.

Por otro lado, en esa misma sección se hizo la observación de que el dual de un n -ágono es el mismo n -ágono, por lo que en este caso no tenemos este problema y **los grupos de simetrías de los n -ágonos sí los caracterizan**.

Un área de investigación en desarrollo, consiste en determinar conjuntos de objetos geométricos que se puedan caracterizar por su grupo de simetrías. No obstante, como veremos en el siguiente y último capítulo, tanto el concepto de objeto geométrico, como el de simetría, pueden ser entendidos de manera más abstracta, por lo que las matemáticas prueban ser cada vez más fundamentales para el estudio de estos conceptos.

4. Geometría Algebraica: otros objetos geométricos

Hasta ahora hemos considerado objetos geométricos en el sentido tradicional. A lo largo de todas las secciones anteriores hemos visto como el álgebra permite estudiar estos objetos geométricos aprovechándose de las estructuras del álgebra abstracta.

Dentro del álgebra abstracta, las diversas estructuras algebraicas han sido estudiadas durante siglos y por tanto, existe una gran variedad de resultados que aportan información sobre estas mismas estructuras. El objetivo de la geometría algebraica es relacionar las estructuras algebraicas abstractas con objetos geométricos, de manera que la información que podamos obtener de las estructuras, nos aporten información sobre los objetos geométricos.

4.1. Otras estructuras abstractas

En la sección 1.1 se introdujo la noción abstracta de grupo, a menudo esta es la primera estructura a estudiar en un curso de álgebra abstracta. La simpleza (y a veces complejidad a la vez) del grupo, radica en que es un conjunto con una sola operación. Se puede decir, de manera muy vaga, que una estructura algebraica será más compleja mientras más operaciones tenga definida y más axiomas se impongan sobre estas operaciones.

Un grupo *abeliano* es un conjunto sobre el cuál se define una operación binaria que cumple todos los axiomas de grupo más la conmutatividad, esto es,

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

La operación de un grupo abeliano usualmente se nota con $+$ y se la denomina suma. Un ejemplo de grupo abeliano son los números enteros \mathbb{Z} con la suma usual de números. Aquí el 0 es el neutro de la suma y los inversos son los números negativos. Note que los números naturales \mathbb{N} no llegan a ser un grupo, pues carecen de inversos.

Un *anillo* es un conjunto sobre el cual se definen dos operaciones, una que cumple los axiomas de grupo abeliano, que usualmente se nota con el signo de la suma $+$ y otra que usualmente se nota con el signo del producto \cdot (o \times) que se pide sea asociativa y cumpla relaciones de distributividad respecto de la suma. Un ejemplo de anillo nuevamente es \mathbb{Z} con la suma y el producto usual.

Note que en este caso existe un neutro para la suma (el 0) y un neutro para el producto (el 1), a un anillo usualmente no se le pide la existencia de este último neutro, en caso de existir se le llama *unidad*. Además, el

producto de números enteros es conmutativo, esta propiedad tampoco es usual en el producto de un anillo y en caso de tenerla, el anillo se llama *conmutativo*.

Un *cuerpo* es un conjunto con dos operaciones, las cuáles cumplen todos los axiomas de anillo, pero al producto se le agregan además, la conmutatividad, la existencia de unidad y la existencia de inverso. En este caso los enteros no cumplen todos los axiomas (no hay inversos para el producto), por lo que tenemos que ampliar el conjunto de números para dar un ejemplo de cuerpo. Específicamente los números racionales \mathbb{Q} forman un cuerpo, lo mismo sucede con los números reales \mathbb{R} y también los complejos \mathbb{C} .

Por supuesto, cuerpos diferentes pueden cumplir propiedades diferentes. Por ejemplo, consideremos el cuerpo \mathbb{R} y el conjunto $\mathbb{R}[X]$ de polinomios con variable⁸ X y coeficientes reales. Los elementos de este conjunto son por ejemplo

$$p(X) = X^2 - X - 2, \quad q(X) = X^2 + 2 \in \mathbb{R}[X].$$

Note que ambos polinomios son de *grado*=2, sin embargo, $p(X)$ tiene dos *raíces* reales, esto es, números $c \in \mathbb{R}$ tales que $p(c) = 0$ ($X = -1$ y $X = 2$), mientras que $q(X)$ no tiene ninguna raíz real ($q(x) \geq 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$).

Por otro lado, si cambiamos el cuerpo a \mathbb{C} , para el conjunto $\mathbb{C}[X]$ se puede probar que cualquier polinomio no constante tiene una raíz en \mathbb{C} . Este resultado es conocido como el *Teorema fundamental del Álgebra*.

En general para un cuerpo k , si todo polinomio en $k[X]$ tiene una raíz sobre k , se dice que k es *algebraicamente cerrado*. Así decimos que \mathbb{C} es un cuerpo algebraicamente cerrado.

Para finalizar esta sección introducimos dos estructuras adicionales a la estructura de anillo, que nos servirán para la teoría a desarrollar de las secciones posteriores.

Dado un anillo $(R, +, \cdot)$ (recuerde que un anillo tiene definidas dos operaciones), un subconjunto $I \subset R$ se dice un *ideal* de R si cumple

1. $(I, +)$ es un subgrupo de $(R, +)$.
2. Para todo $a \in R$ y $x \in I$ se tiene que $a \cdot x \in I$.

En particular, para un $a \in R$, el conjunto

$$aR = \{a \cdot x : x \in R\}$$

es un ideal y se lo llama el ideal *generado* por a , usualmente este ideal se nota por $\langle a \rangle$ o (a) .

Un ideal puede ser generado por más de un elemento de R , de hecho es posible que el ideal tenga un número **infinito** de generadores. Un tipo especial de anillos, son anillos para los cuáles todos sus ideales son *finitamente generados* (generados por un número finito de elementos), tales anillos se llaman *Noetherianos* y juegan un importante rol para la geometría algebraica.

4.2. Variedades algebraicas

Usando la estructura de cuerpo y de polinomios sobre este cuerpo, es posible describir otro tipo de lugares geométricos. Para un cuerpo k conviene considerar el espacio n -dimensional k^n ($n \geq 1$) y los polinomios sobre n variables $k[X_1, X_2, \dots, X_n]$. Por ejemplo, consideremos el cuerpo \mathbb{R} , el espacio \mathbb{R}^2 y los polinomios $\mathbb{R}[X, Y]$, entonces la ecuación

$$Y - X^2 = 0$$

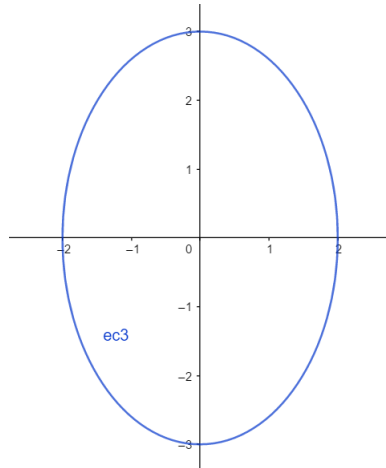
define una *parábola* en el espacio bidimensional \mathbb{R}^2 . Note que el lado izquierdo de la ecuación es un polinomio de dos variables

$$p(X, Y) = Y - X^2 \in \mathbb{R}[X, Y].$$

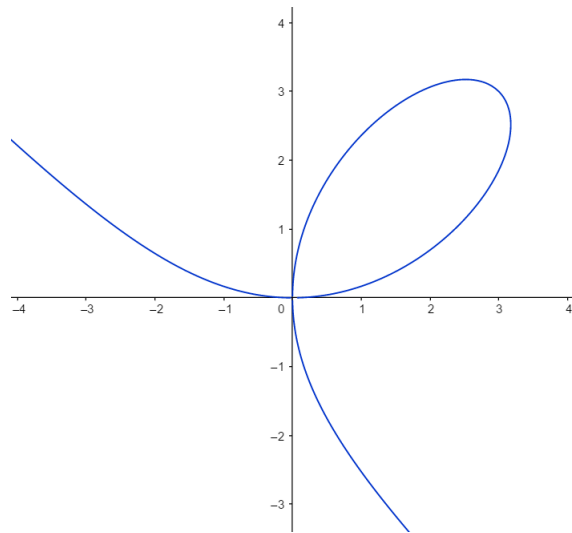
Para efectos de exposición, si mantenemos el mismo cuerpo base y espacio, podemos describir varios *lugares geométricos* de esta manera.

⁸Usaremos la X mayúscula para denotar la variable y reservaremos la minúscula x para puntos de las variedades. Así $p(X)$ es el polinomio p y $p(x)$ es el valor de p en el punto $x \in \mathbb{C}$.

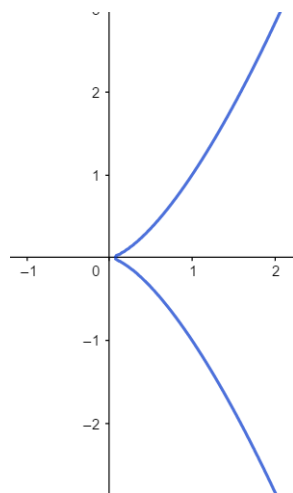
- *Elipse* $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} - 1 = 0$



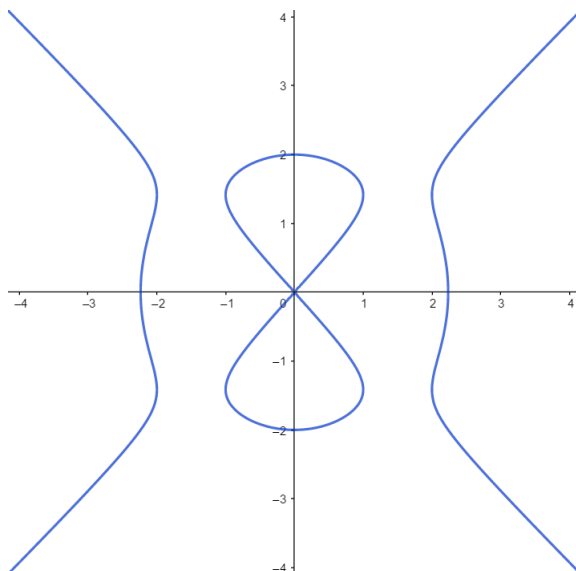
- *Folio de Descartes* $X^3 + Y^3 - 6XY = 0$



- *Cúbica cuspidal* $X^3 - Y^2 = 0$



- *Curva de diablo* $Y^2(Y^2 - 4) - X^2(X^2 - 5) = 0$



Todos estos lugares geométricos son usualmente estudiados por primera vez en un curso de cálculo o geometría analítica y se las conocen como *curvas* en el plano, más aún, la parábola y elipse son ejemplos de un tipo especial de curvas, llamadas *cónicas*. Note además que todas estas curvas están definidas por una ecuación de la forma

$$p(X, Y) = 0$$

donde $p(X, Y) \in \mathbb{R}[X, Y]$ es un polinomio en dos variables.

Sigamos considerando el cuerpo \mathbb{R} , pero ahora pensemos en el espacio tridimensional \mathbb{R}^3 . De la experiencia con el cálculo en varias variables sabemos que en el espacio \mathbb{R}^3 una ecuación de la forma

$$f(X, Y, Z) = 0,$$

con $f(X, Y, Z) \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$, define una superficie en el espacio \mathbb{R}^3 , mientras que una curva en este mismo espacio está definida de la forma

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f_1(x, y, z) = f_2(x, y, z) = 0\},$$

donde $f_1, f_2 \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$.

En general, para un cuerpo base k y un conjunto (finito) de polinomios $f_1, \dots, f_r \in k[X_1, \dots, X_n]$, definimos la *variedad algebraica* (afín)⁹:

$$\mathcal{X} = Z(f_1, \dots, f_r) = \{x \in k^n : f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_r(x) = 0\} \subset k^n.$$

La noción de variedad algebraica generaliza la idea de lugar geométrico expresado antes, en lo que queda de este curso, el objetivo será dar una idea de cómo calcular las simetrías de estos nuevos objetos geométricos.

Una primera consecuencia de la definición de variedad algebraica es que si S_1 y S_2 son dos conjuntos de polinomios en $k[X_1, \dots, X_n]$ tales que $S_1 \subset S_2$, tenemos que

$$Z(S_2) \subset Z(S_1).$$

En efecto,

$$x \in Z(S_2) \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \forall f \in S_2 \supset S_1 \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall f \in S_1 \Leftrightarrow x \in Z(S_1).$$

Esta es la llamada *propiedad decreciente*.

Una segunda consecuencia se da por la naturaleza del anillo de polinomios. Note que si $S \subset k[X_1, \dots, X_n]$, entonces

$$Z(S) = Z(\langle S \rangle),$$

⁹En realidad la definición de variedad es mucho más complicada, pero para los conceptos a introducir basta esta idea.

donde $\langle S \rangle$ denota al ideal generado por el conjunto S . Esto quiere decir que podemos pensar en las variedades algebraicas como el conjunto de ceros de ideales generados por un conjunto de polinomios. Para facilitar la notación, $Z(S)$ significará la variedad correspondiente al ideal generado por S , en particular, podemos siempre considerar S como un ideal de $k[X_1, \dots, X_n]$.

El siguiente es uno de los teoremas más importantes del álgebra y tendrá una consecuencia de suma utilidad para el estudio de las variedades algebraicas, se trata del llamado *teorema de la base de Hilbert*, que enunciamos aquí sin demostración.

Teorema 6 (Base de Hilbert). *El anillo $k[X_1, \dots, X_n]$ es Noetheriano.*

Este teorema nos asegura que cualquier ideal del anillo $k[X_1, \dots, X_n]$ está generado por un número finito de polinomios, si juntamos este resultado con la observación hecha justo antes de enunciar el teorema tenemos que, a lo que variedades algebraicas se refiere, podemos enfocarnos solo en conjuntos finitos de polinomios.

A pesar de que la definición de variedad funciona para cualquier cuerpo base k , la teoría se simplifica considerablemente si el cuerpo escogido es algebraicamente cerrado, por ejemplo \mathbb{C} . Por esta razón, de ahora en adelante, a menos que se especifique lo contrario, trabajaremos con el cuerpo algebraicamente cerrado \mathbb{C} como cuerpo base, el espacio n -dimensional \mathbb{C}^n y los polinomios en n variables $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$.

4.3. Morfismos de variedades

Las simetrías de variedades algebraicas estarán dadas por funciones especiales de una variedad algebraica en sí misma. Concretamente, para una variedad algebraica, tenemos dos tipos de funciones que podemos considerar como simetrías: los *automorfismos regulares* y los *morfismos birracionales*. En particular, lo lógico a pedir para estas funciones, es que sean continuas.

Ahora bien, para la noción de continuidad será necesario definir una topología sobre el espacio que contiene a las variedades algebraicas, es decir sobre \mathbb{C}^n . Afortunadamente, la propia definición de variedad nos proporciona una topología natural.

Proposición 2.

1. *El espacio \mathbb{C}^n y el vacío son variedades algebraicas.*
2. *La intersección arbitraria de variedades algebraicas es una variedad algebraica.*
3. *La unión finita de variedades algebraicas es una variedad algebraica.*

Demostración. Para la primera parte de la proposición, basta notar que

$$Z(0) = \mathbb{C}^n \quad \text{y} \quad Z(1) = \emptyset.$$

Para la segunda parte, sea $\{S_i\}_{i \in I} \subset k[X_1, \dots, X_n]$, una familia arbitraria de conjuntos de polinomios, probaremos que

$$\bigcap_{i \in I} Z(S_i) = Z\left(\bigcup_{i \in I} S_i\right).$$

En efecto, si $x \in Z\left(\bigcup_{i \in I} S_i\right)$ por definición

$$f(x) = 0, \forall f \in S_i, \forall i,$$

pero entonces, también por definición

$$x \in \bigcap_{i \in I} Z(S_i).$$

Para la tercera parte, basta probar que

$$Z(S_1) \cup Z(S_2) = Z(S_1 S_2),$$

donde S_1, S_2 son conjuntos de polinomios y el conjunto $S_1 S_2$ se define como

$$S_1 S_2 = \{f_1 f_2 : f_1 \in S_1, f_2 \in S_2\}.$$

Ya que tanto S_1 como S_2 son ideales, tenemos que el producto $S_1S_2 \subset S_1, S_2$; por la propiedad de decrecimiento, se sigue

$$Z(S_1) \cup Z(S_2) \subset Z(S_1S_2).$$

Por otro lado, si $x \notin Z(S_1) \cup Z(S_2)$ entonces existen $f_1 \in S_1$ y $f_2 \in S_2$ tales que $f_1(x) \neq 0$ y $f_2(x) \neq 0$, de donde $f_1f_2(x) \neq 0$ entonces $x \notin Z(S_1S_2)$. ■

La última proposición dice que las variedades algebraicas cumplen los axiomas de conjuntos cerrados de un espacio topológico, o equivalentemente, los complementos de las variedades serán los abiertos de una topología. Esta topología es llamada la topología de *Zariski* y será la topología estándar a usar en la geometría algebraica.¹⁰

En particular, dado que el anillo $k[X_1, \dots, X_n]$ es Noetheriano, se cumple que los conjuntos de la forma

$$D_f := \mathbb{C}^n \setminus Z(f) = \{x \in \mathbb{C}^n : f(x) \neq 0\}$$

forman una *base* para la topología de Zariski.

Por consenso, el espacio \mathbb{C}^n dotado de la topología de Zariski se nota

$$\mathbb{A}^n$$

y se lo llama es espacio *afín* n -dimensional. En particular, \mathbb{A}^1 se llama la *recta afín* y \mathbb{A}^2 se llama el plano afín.

Tenemos entonces que las variedades algebraicas \mathcal{X} , son conjuntos definidos por un número finito de ecuaciones polinomiales, inmersos en un espacio afín n -dimensional \mathbb{A}^n . Podemos ahora definir las primeras funciones que representarán simetrías de variedades algebraicas.

Dada una variedad $\mathcal{X} \subset \mathbb{A}^n$, una función $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$ se llama *regular* si es la restricción de un polinomio, es decir, f es regular si

$$\exists P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \quad \text{tal que} \quad f = P|_{\mathcal{X}}.$$

En particular, si consideramos a \mathbb{C} como la recta afín \mathbb{A}^1 , se sigue que una función regular es continua.

Dadas dos variedades algebraicas $\mathcal{X} \subset \mathbb{A}^n$, $\mathcal{Y} \subset \mathbb{A}^m$, una función polinómica $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ se llama un *morfismo regular* entre variedades. Al igual que antes, esta función será continua gracias a la definición de la topología de Zariski.

Un morfismo regular

$$f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$$

se llama un *automorfismo regular*, si es biyectiva y además existe otro morfismo regular

$$g : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$$

tal que $f \circ g = g \circ f = Id_{\mathcal{X}}$.

El conjunto de automorfismos regulares de una variedad algebraica, se nota

$$Aut(\mathcal{X}) = \{f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, f \text{ automorfismo regular}\}.$$

Los automorfismos regulares son las primeras funciones que nos servirán como simetrías de las variedades algebraicas. Para las otras funciones que usaremos como simetrías (los morfismos birracionales), tendremos que pasar primero por una definición auxiliar, estos son los llamados morfismos *racionales*. A pesar de que la definición formal es más complicada, para objeto de este curso, podemos considerar a los morfismos racionales como morfismos entre variedades algebraicas definidos por cocientes de polinomios, esto es, funciones de la forma

$$f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}, \quad x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Note que el dominio de la función f necesariamente es el conjunto

$$\{x \in \mathbb{C}^n : q(x) \neq 0\},$$

que es un abierto en la topología de Zariski. Así, una función racional está definida sobre un abierto de una variedad algebraica.

Un morfismo racional $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ invertible en el sentido de que, existe otro morfismo racional $\psi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ tal que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = Id_{\mathcal{X}}$, se dice un morfismo *birracional*. El conjunto de morfismos birracionales se nota

$$Bir(\mathcal{X}) = \{\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, \varphi \text{ birracional}\}.$$

¹⁰El lector con background en topología sabrá que existe una topología usual definida sobre \mathbb{C} . Las razones para usar la topología de Zariski sobre la topología usual son varias, pero se pueden resumir diciendo que Zariski viene de manera natural al considerar variedades algebraicas.

4.4. Las simetrías de la recta afín

Ahora que hemos introducido los conceptos de variedad algebraica, automorfismos de una variedad y morfismos birracionales de una variedad. Podemos calcular las “simetrías” de una variedad algebraica para ilustrar el concepto de simetría de estos nuevos objetos geométricos. Concretamente nos enfocaremos en la recta afín \mathbb{A}^1 .

Como dijimos antes, existen dos tipos de morfismos que podemos interpretar como simetrías, así que en esta sección, el objetivo será encontrar los conjuntos

$$\text{Aut}(\mathbb{A}^1) \quad \text{y} \quad \text{Bir}(\mathbb{A}^1).$$

Por definición, los elementos de $\text{Aut}(\mathbb{A}^1)$ son morfismos regulares (biyectivos) que tienen una inversa regular, esto es, funciones polinomiales que tienen una inversa polinomial.

Como estamos considerando el espacio \mathbb{A}^1 , el anillo de polinomios respectivo es $\mathbb{C}[X]$. Es decir, los morfismos regulares son polinomios de una sola variable de la forma

$$f : \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1, \quad x \mapsto p(x)$$

con $p(X) \in \mathbb{C}[X]$.

Necesitamos además que estas funciones polinomiales sean biyectivas y que tengan una inversa polinomial. No es difícil ver que aunque varios polinomios de grado impar son biyectivos, su inversa no es un polinomio a menos que el grado sea igual a 1. Es decir, el grupo de automorfismos de \mathbb{A}^1 tiene que ser

$$\text{Aut}(\mathbb{A}^1) = \{ax + b : a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}.$$

Lo que nos dice que el primer tipo de simetrías de la recta afín se da por funciones lineales. Se puede justificar esto pensando en que la “imagen” de una función lineal es una “recta”, por ende es lógico que esta sea una simetría de la recta afín. Los otros tipos de simetrías que presentaremos ya no tienen una justificación geométrica tan evidente, por lo que, como dijimos antes, las matemáticas juegan un rol más importante en el entendimiento del concepto de simetrías para estos objetos geométricos.

Por otro lado, los morfismos racionales son de la forma

$$f : \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1, \quad x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

definidas sobre los abiertos respectivos. Ahora, necesitamos que las funciones sean inyectivas y tengan una inversa definida por un cociente de polinomios, nuevamente los polinomios de grado diferente a 1, muestran tener problemas para cumplir estas condiciones, por lo que nos restringimos a cocientes de polinomios de grado 1. No obstante, aún tenemos que asegurar que estas funciones sean inyectivas, así tenemos que los morfismos birracionales deben ser de la forma

$$\text{Bir}(\mathbb{A}^1) = \left\{ f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} : f(x) \text{ inyectivos} \right\}.$$

Para verificar la inyectividad, tomemos $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ y miremos qué

$$\begin{aligned} \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d} &= \frac{ax_2 + b}{cx_2 + d} \\ \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cx_1 + d)} &= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cx_2 + d)} \\ (bc - ad)(cx_2 + d) &= (bc - ad)(cx_1 + d), \quad c \neq 0 \\ (ad - bc)(x_1 - x_2) &= 0. \end{aligned}$$

De donde se tiene que f es inyectiva si $ad - bc \neq 0$. Entonces

$$\text{Bir}(\mathbb{A}^1) = \left\{ \frac{ax + b}{cx + d} : ad - bc \neq 0 \right\}.$$

Note que si extraemos las constantes que definen la función $\frac{ax+b}{cx+d}$ y las ponemos en una matriz, la condición $ad - bc \neq 0$ equivale que la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sea invertible.

Más aún, un cálculo directo muestra que

$$\frac{ax+b}{cx+d} \circ \frac{a'x+b'}{c'x+d'} = \frac{(aa'+bc')x+(ab'+bd')}{(ca'+dc')x+(cb'+dd')}$$

y también

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}.$$

Es aparente entonces que $Bir(\mathbb{A}^1)$ guarda una relación con el grupo $GL(2, \mathbb{C})$, de matrices cuadradas invertibles de orden 2. Sin embargo, note que si $\lambda \in \mathbb{C}^*$ se tiene que

$$\frac{\lambda ax + \lambda b}{\lambda cx + \lambda d} = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Esto significa que si queremos identificar $Bir(\mathbb{A}^1)$ con $GL(2, \mathbb{C})$, primero tenemos que “pegar” matrices que difieren en la multiplicación por un escalar no nulo. Así definimos la relación de equivalencia:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad \exists \lambda \in \mathbb{C}^* : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

Con lo que se sigue que

$$Bir(\mathbb{A}^1) = \frac{GL(2, \mathbb{C})}{\mathbb{C}^*}.$$

Este grupo es conocido como el grupo proyectivo lineal $PGL(2, \mathbb{C})$ y en el análisis complejo se lo conoce como el grupo de transformaciones de Möbius sobre \mathbb{C} .

4.5. Variedades Tóricas

Para finalizar el curso, presentamos un tipo especial de variedades algebraicas, las cuáles hoy en día son causa de gran interés de investigación dentro de la geometría algebraica. Tales variedades son llamadas *variedades tóricas* y para su definición será necesario introducir algunos conceptos más.

El interés en las variedades tóricas viene, en gran parte, de la riqueza de su estructura. Una variedad tórica es una variedad algebraica que tiene asociada además una estructura de grupo y una estructura combinatoria subyacente. Aquí introducimos las variedades tóricas desde la estructura de grupo.

Comenzamos considerando el conjunto $\mathbb{C}^* \subset \mathbb{C} = \mathbb{A}^1$. Note que este conjunto es el abierto **denso** de Zariski

$$\mathbb{C}^* = D_X = \mathbb{A}^1 \setminus Z(X) = \mathbb{A}^1 \setminus \{x \in \mathbb{A}^1 : x = 0\} = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}.$$

A este conjunto además se le puede dotar de estructura de variedad algebraica, si lo identificamos con una hipérbola dentro del plano afín \mathbb{A}^2 .

En efecto, consideremos la variedad

$$\mathcal{X} = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 : xy - 1 = 0\} \subset \mathbb{A}^2.$$

Entonces los pares $(x, y) \in \mathbb{A}^2$ están formados por números complejos no nulos (de otra manera no se cumple la ecuación). Esto nos permite despejar la y de la ecuación que define \mathcal{X} y podemos describir a la variedad como

$$\mathcal{X} = \left\{ \left(x, \frac{1}{x} \right) \right\} \subset \mathbb{A}^2.$$

Es decir, son todos los puntos invertibles de \mathbb{C} , en otras palabras, podemos identificar

$$\mathcal{X} = \mathbb{C}^*.$$

Más aún, si definimos sobre \mathcal{X} la operación binaria

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx', yy'),$$

notamos que (\mathcal{X}, \cdot) cumple los axiomas de grupo. En efecto, la operación \cdot hereda la asociatividad del producto de \mathbb{C} , mientras que el neutro está dado por

$$(1, 1) \in \mathcal{X}$$

y el inverso se define por

$$(x, y)^{-1} = (y, x).$$

Así vemos que $\mathcal{X} = \mathbb{C}^*$ es una variedad algebraica, que además es un grupo; a esta estructura se le llama *grupo algebraico* y en específico a \mathbb{C}^* se lo llama el *toro algebraico*.

Específicamente \mathbb{C}^* es el toro en una dimensión, el toro n -dimensional será sencillamente $(\mathbb{C}^*)^n$.

Al final de la Sección 1.3 se habló de como el grupo D_{2n} actúa sobre un n -ágono. La operación de *acción* de un grupo sobre un conjunto es una definición matemática abstracta que puede funcionar para cualquier grupo G y cualquier conjunto X . En particular podemos escoger G como un grupo algebraico y $X = \mathcal{X}$ una variedad algebraica.

Dado un grupo algebraico G (por ejemplo $(\mathbb{C}^*)^n$) y una variedad \mathcal{X} , decimos que existe una *acción regular* de G sobre \mathcal{X} si existe un morfismo regular

$$\bullet : G \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$$

que satisface los axiomas de *acción*:

1. Para todos $g, g' \in G$ y $x \in \mathcal{X}$:

$$(gg') \bullet x = g \bullet (g' \bullet x).$$

2. Para todo $g \in G$ y todo $x \in \mathcal{X}$:

$$x = (gg^{-1}) \bullet x = g \bullet (g^{-1} \bullet x).$$

Para un $x \in \mathcal{X}$, definimos la *órbita* de x como el conjunto

$$Orb(x) = \{t \bullet x : t \in G\}.$$

Una *variedad tórica* es una variedad algebraica \mathcal{X} , sobre la cuál actúa un toro algebraico T , tal que \mathcal{X} tiene a T contenido como un abierto de Zariski. En particular T es una órbita abierta de la acción regular de T sobre \mathcal{X} .

Por ejemplo, consideremos la variedad \mathbb{A}^2 y el toro bidimensional $(\mathbb{C}^*)^2$. El morfismo

$$(\mathbb{C}^*)^2 \times \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$$

definido por

$$(t_1, t_2) \times (x, y) \mapsto (t_1x, t_2y).$$

Es una acción del toro bidimensional sobre el plano afín, que además es regular (todas sus componentes son polinomios), por tanto define una acción regular de $(\mathbb{C}^*)^2$ sobre \mathbb{A}^2 . Además, si consideramos el elemento $(1, 1) \in \mathbb{A}^2$, se tiene que

$$Orb(1, 1) = \{(t_1, t_2) \bullet (1, 1) : (t_1, t_2) \in (\mathbb{C}^*)^2\} = \{(t_1, t_2) \in (\mathbb{C}^*)^2\} = (\mathbb{C}^*)^2.$$

De donde \mathbb{A}^2 es una variedad Tórica.

Para terminar, notemos que la cúbica cuspidal (considerada como subconjunto de \mathbb{A}^2 !!), definida en la Sección 4.2, es también una variedad Tórica. En efecto, llamemos

$$\mathcal{X} = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 : x^3 - y^2 = 0\} \subset \mathbb{A}^2$$

y definamos el morfismo

$$\mathbb{C}^* \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, (t, (x, y)) \mapsto (t^2x, t^3y).$$

Es obvio que es un morfismo regular y una acción de \mathbb{C}^* sobre \mathcal{X} , falta solamente demostrar que la variedad contiene al toro como una órbita, pero esto inmediato pues

$$Orb(1, 1) = \{t \bullet (1, 1) : t \in \mathbb{C}^*\} = \{(t^2, t^3) \in \mathbb{C}^*\} = \mathcal{X}.$$