Resumen

El objetivo de este cursillo es el de introducir a los estudiantes interesados a la teoría de representaciones. La vía para esto será la de la teoría de representaciones complejas de grupos finitos. El cursillo constará de 4 sesiones: En la primera sesión se hablará de las generalidades sobre representaciones de grupos finitos, tomando en cuenta cuestiones como la semisimplicidad y culminando en el teorema de Maschke y el lema de Schur. La segunda sesión se enfocará en las cuestiones básicas de la teoría de caracteres complejos. Esta es una potente arma para el estudio de la teoría de representaciones y un área de estudio por derecho propio. La tercera sesión será sobre inducción y restricción de representaciones. Se presentará la reciprocidad de Frobenius y sus consecuencias. Finalmente la cuarta sesión será un compendio de ejemplos de grupos y sus representaciones. En esta sesión también introduciremos las tablas de caracteres y estudiaremos sus propiedades más elementales.

El enfoque es bastante introductorio, por lo que teoremas como el de Artin y el de Brauer, propiedades de integridad de caracteres, entre otros, no será tratados. Según la disponibilidad de tiempo, posiblemente se presente el teorema de Frobenius como una de las aplicaciones más hermosas y elementales de la teoría de caracteres. En caso de no ser posible, este será incluido de todos modos en las notas escritas, para que el estudiante interesado pueda leerlo a futuro.

Estas notas son mayoritariamente autocontenidas. Se demuestran todos los resultados, dejando solamente los detalles más sencillos como ejercicios, así como ciertas verificaciones y ejemplos. Eventualmente habrá necesidad del uso del lenguaje de la teoría de categorías, pero esto se hará como material suplementario o simplemente notas para despertar la curiosidad de los estudiantes. Estas notas poseen más contenido del realmente cubierto en el curso y expande en gran detalle las ideas ahí presentadas.

Al final de estas notas se incluyen apéndices con breves exposiciones de temas prerrequisito para un curso de teoría de representaciones. Algunos de estos apéndices serán abordados parcialmente durante las sesiones, pero en general, su lectura quedará a cargo del estudiante.

Quiero agradecer a Stephen Griffeth, quien me motivó a adentrarme en el estudio de la teoría de representaciones, y a Elizabeth Manosalva, quien ha sido un gran apoyo en este trayecto, y quien además ha revisado estas, señalado varias correcciones y me ha sugerido varias mejoras que han sido consideradas en este trabajo.

Finalmente, con mucha seguridad estas notas contendrán errores, por lo que se agradece informar de los mismos a mi correo electrónico carlosajila@inst-mat.utalca.cl

A. Categorías y funtores

A.1. Categorías

Una *categoría* $\mathcal{C}$ es una colección que consta de la siguiente información:

- Una clase $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ cuyos elementos se llaman los *objetos* de la categoría $\mathcal{C}$.
- Para cada par de objetos $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ una clase (posiblemente vacía) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ cuyos elementos se llaman *morfismos*. Un elemento $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ se denota por $f : A \to B$ o $A \xrightarrow{f} B$.

- Para cada tres objetos $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ una función

$$\begin{array}{rccc} \circ: & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C) \\ & (f,g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

  llamada *composición*.

Además esta información está regida por los siguientes axiomas:

C1. La composición es asociativa, es decir, si A, B, C, D son objetos de $\mathcal{C}$ y si $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ son morfismos, entonces

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h.$$

C2. Para cada objeto A en la categoría $\mathcal{C}$, existe $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ llamado el *morfismo identidad sobre* A que satisface la siguiente propiedad: Si A, B, C son objetos de $\mathcal{C}$ y $f : A \to B$ y $g : C \to A$ son morfismos, entonces

$$f \circ 1_A = f \qquad \text{y} \qquad 1_A \circ g = g.$$

Ejercicio A.1. Muestre que las identidades en una categoría son únicas.

Ejemplo A.2. La categoría **Sets** es aquella cuyos objetos son los conjuntos y cuyos morfismos son las funciones entre conjuntos. La composición en esta categoría está dada por la composición usual de funciones y las identidades por la función identidad de conjuntos.

Ejemplo A.3. Sea X un *preorden*, es decir, X es un conjunto equipado con una relación $\leq$ reflexiva y transitiva (no necesariamente antisimétrica). Entonces X define una categoría $\mathbb{X}$ cuyos objetos son los elementos de X y cuyos morfismos están dados del siguiente modo: Si $x, y \in X$, entonces

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(x,y) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \not\leq y \\ \{(x,y)\} & \text{si } x \leq y. \end{cases}$$

Si $x \leq y \leq z$, se tiene la composición

$$(y,z) \circ (x,y) = (x,z).$$

Las identidades están dadas por los pares ordenados (x, x).

Ejemplo A.4. Si G es un grupo, este define una categoría $\mathbb{G}$ del siguiente modo: $\mathrm{Ob}(\mathbb{G}) = \{*\}$ (un conjunto de un elemento) y tal que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(*,*) = G.$$

La composición está dada por la ley de composición interna del grupo y la identidad es el neutro del grupo.

Ejemplo A.5. La categoría **Grp** tiene como objetos a todos los grupos, como morfismos a todos los homomorfismos de grupos, con la composición usual de funciones.

Ejemplo A.6. La categoría **Ab** tiene como objetos a todos los grupos abelianos, como morfismos a todos los homomorfismos de grupos, con la composición usual de funciones.

Definición. Sea $f : A \to B$ un morfismo en una categoría.

(i) f se dice un *monomorfismo* si para todo par de morfismos $g, h : C \to A$ tales que $f \circ g = f \circ h$ se tiene que $g = h$.

(ii) f se dice un *epimorfismo* si para todo par de morfismos $g, h : B \to C$ tales que $g \circ f = h \circ f$ se tiene que $g = h$.

(iii) f se dice un *isomorfismo* si existe un morfismo $g : B \to A$ tal que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$.

Ejercicio A.7. Pruebe que todo isomorfismo es un monomorfismo y un epimorfismo, pero que un morfismo que es a la vez monomorfismo y epimorfismo no es necesariamente un isomorfismo.

Ejercicio A.8. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con un sólo objeto $*$. Asuma que $G := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(*, *)$ es un conjunto y que todo elemento de G es un isomorfismo. Pruebe que G es un grupo.

A.2. Funtores

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Un *funtor covariante* es una función $T : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ junto con una colección de funciones

$$\begin{array}{rccl} T_{A,B} : & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(T(A), T(B)) \\ & f & \longmapsto & T(f) \end{array}$$

para cada par de objetos A, B en $\mathcal{C}$ que verifica las siguientes propiedades: Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son morfismos en $\mathcal{C}$, entonces

$$T(g \circ f) = T(g) \circ T(f),$$

y para todo objeto A de $\mathcal{C}$,

$$T(1_A) = 1_{T(A)}.$$

Análogamente un *funtor contravariante* es una función $T : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ junto con una colección de funciones

$$\begin{array}{rccl} T_{A,B} : & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(T(B), T(A)) \\ & f & \longmapsto & T(f) \end{array}$$

para cada par de objetos A, B en $\mathcal{C}$ que verifica las siguientes propiedades: Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son morfismos en $\mathcal{C}$, entonces

$$T(g \circ f) = T(f) \circ T(g),$$

y para todo objeto A de $\mathcal{C}$,

$$T(1_A) = 1_{T(A)}.$$

Ejemplo A.9 (Funtores Hom)**.** Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sea A un objeto de $\mathcal{C}$. Definimos el funtor $T = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) : \mathcal{C} \to \mathbf{Sets}$ del siguiente modo: Si B es un objeto de $\mathcal{C}$, entonces $T(B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ y si $f : B \to C$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, entonces $T(f) = f_* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$ es la función dada por

$$f_*(g) = f \circ g, \qquad \text{para todo } g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B).$$

Similarmente, se define el funtor $S = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) : \mathcal{C} \to \mathbf{Sets}$ para cada objeto B de $\mathcal{C}$ mediante $S(B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ y para cada morfismo $f : B \to C$, la función $S(f) = f^* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ mediante

$$f^*(g) = g \circ f, \qquad \text{para todo } g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$$

Ejercicio A.10. Pruebe que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$ es un funtor covariante y que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ es un funtor contravariante.

Ejercicio A.11. Sean X e Y dos pre-órdenes. Explique por qué un funtor covariante $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ es "lo mismo" que una aplicación creciente $f : X \to Y$. Similarmente explique por qué un funtor contravariante $\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ es lo mismo que una aplicación decreciente $X \to Y$.

B. Acciones de grupos

Sea G un grupo y X un conjunto. Una *acción* (por izquierda) de G sobre X es una función

$$\begin{array}{rcl} G \times X & \longrightarrow & X \\ (x, g) & \longmapsto & g \cdot x = gx \end{array}$$

que verifica

(i) Para todo $g, h \in G$ y todo $x \in X$, se tiene $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$;

(ii) Para todo $x \in X$ se tiene $1 \cdot x = x$.

En este caso diremos que G actúa sobre X.

Equivalentemente, si $S(X)$ representa el grupo simétrico en X, es decir, el conjunto de todas las funciones biyectivas $X \to X$ equipado con la composición, entonces una acción de G sobre X es un homomorfismo

$$\rho : G \to S(X).$$

En efecto, si G actúa sobre X, para cada $g \in G$ definimos la función $\rho(g) : X \to X$ mediante $\rho(g)(x) = g \cdot x$. Notemos que

$$\rho(g^{-1}) \circ \rho(g)(x) = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1}g) \cdot x = 1 \cdot x = x,$$

y similarmente $\rho(g) \circ \rho(g^{-1}) = \mathrm{id}_X$, por ende $\rho(g) \in S(X)$. Tenemos que $\rho : G \to S(X)$ es un homomorfismo de grupos, pues

$$\rho(gh)(x) = (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = \rho(g)(\rho(h)(x)) = \rho(g) \circ \rho(h)(x)$$

para todo $g, h \in G$ y todo $x \in X$. Recíprocamente, dado un homomorfismo de grupos $\rho : G \to S(X)$, definimos una acción de G sobre X mediante

$$g \cdot x = \rho(g)(x).$$

Es inmediato del hecho de que ρ es un homomorfismo que se verifican (i) y (ii).

Ejemplo B.1. G actúa sobre sí mismo por multiplicación a la izquierda: La aplicación $G \times G \to G$ dada por $(g, h) \mapsto gh$ es una acción de G sobre G.

Ejemplo B.2. Sea G un grupo y $H \leq G$ un subgrupo. Entonces G actúa sobre G/H por multiplicación a izquieda: La aplicación $G \times (G/H) \to G/H$ dada por $(g, g'H) \mapsto gg'H$ define una acción de G sobre G/H.

Ejemplo B.3. Sea G un grupo y $H \trianglelefteq G$ un subgrupo normal. Entonces G actúa sobre H por conjugación, es decir, la aplicación $G \times H \to H$ dada por $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$ define una acción de G sobre H. En particular, G actúa sobre sí mismo por conjugación.

Supongamos que G actúa sobre un conjunto X. Si $x \in X$, la *órbita* de x bajo la acción de G es el conjunto

$$G \cdot x = Gx = \{g \cdot x \mid g \in G\}.$$

El *estabilizador* de x por G es el conjunto

$$\mathrm{Stab}_G(x) = G_x = \{g \in G \mid gx = x\}.$$

Ejercicio B.4. Pruebe que la relación $x \sim y$ si existe $g \in G$ tal que $y = g \cdot x$ es una relación de equivalencia en X y que las clases de equivalencia son precisamente las órbitas de la acción de G sobre X. Pruebe además que para todo $x \in X$ el conjunto $\mathrm{Stab}_G(x) = G_x$ es un subgrupo de G.

Una acción se dice *transitiva* si posee una única órbita. Es decir, si para todo $x, y \in X$ existe $g \in G$ tal que $y = g \cdot x$. La acción se dice *fiel* si para todo $g \neq 1$, existe $x \in X$ tal que $x \neq g \cdot x$. Equivalentemente, si $g \cdot x = x$ para todo $x \in X$ implica que $g = 1$

Ejercicio B.5. Pruebe que una acción de G sobre X es fiel si y sólo si el homomorfismo asociado $G \to S(X)$ es inyectivo.

Supongamos que G actúa sobre X, y sea $x \in X$. Existe una aplicación natural

$$\begin{array}{rcl} G/\mathrm{Stab}_G(x) & \longrightarrow & Gx \\ gG_x & \longmapsto & g \cdot x. \end{array}$$

Esta aplicación está bien definida pues si $gG_x = hG_x$, entonces $h^{-1}g \in G_x = \mathrm{Stab}_G(x)$ y por ende $h^{-1}g \cdot x = x$, de donde $g \cdot x = h \cdot x$. Notemos además que si $g \cdot x = h \cdot x$ entonces $h^{-1}g \cdot x = x$ y por ende $h^{-1}g \in G_x$, de donde $gG_x = hG_x$ y tal aplicación es inyectiva. Finalmente dicha aplicación es claramente sobreyectiva. De este modo hemos probado el siguiente resultado:

Teorema B.6 (Órbita-estabilizador)**.** *La aplicación $G/G_x \to G \cdot x$ construida arriba es una biyección. En particular, si G es un grupo finito, entonces*

$$|G \cdot x| = [G : G_x] = \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}_G(x)|}.$$

Ejercicio B.7 (Teorema de Cauchy)**.** Este teorema dice lo siguiente: *Sea G un grupo finito y p un número primo tal que $p \mid |G|$. Entonces existe $g \in G$ tal que $g^p = 1$.*

Nuestro objetivo será demostrar el teorema de Cauchy usando el teorema órbita-estabilizador. Para ello sea

$$X = \{(g_1, \dots, g_p) \in G^p \mid g_1 \cdots g_p = 1\}$$

y sea $C_p = \langle \sigma \mid \sigma^p = 1 \rangle$ el grupo cíclico de orden p. Definimos una aplicación $C_p \times X \to X$ como sigue:

$$\sigma(g_1, g_2, \dots, g_p) = (g_2, \dots, g_p, g_1).$$

(a) Pruebe que esta aplicación define una acción de C_p sobre X.

(b) Demuestre que $|X| = |G|^{p-1}$ y que por ende $p \mid |X|$ (*Ayuda: Use el pequeño teorema de Fermat.*)

(c) Usando el teorema órbita-estabilizador, muestre que toda órbita de G tiene 1 o p elementos.

(d) Pruebe que existe al menos una órbita de tamaño 1 y concluya que deben existir al menos p órbitas de tamaño 1.

(e) Concluya.

C. Módulos sobre álgebras y productos tensoriales

C.1. Módulos y bimódulos

Sea k un cuerpo. Una k-*álgebra* es un espacio vectorial A que es a la vez un anillo, tal que la multiplicación es bilineal, es decir, si $x, y \in A$ y $a \in k$, entonces

$$(ax)y = x(ay) = axy.$$

Ejemplo C.1. Si n es un entero positivo, el espacio vectorial $\mathbf{M}_n(k)$ formado por las matrices cuadradas $n \times n$ es una k-álgebra, donde la multiplicación está dada por el producto de matrices.

Un A-*módulo* (por izquierda) es un espacio vectorial M junto con una aplicación $A \times M \to M$, $(a, x) \mapsto ax$, que verifica

(1) $a(x + y) = ax + ay$;

(2) $(a + b)x = ax + bx$;

(3) $a(bx) = (ab)x$;

(4) $1x = x$

para todo $x, y \in M$, $a, b \in A$. La noción de módulo por derecha es análoga.

Si M es un A-módulo, un submódulo de M es un subespacio vectorial N tal que $aN \subseteq N$ para todo $a \in A$. Si N es un submódulo de M, el espacio vectorial cociente M/N tiene una estructura natural de A-módulo dada por

$$a(x + N) = ax + N.$$

Ejemplo C.2. Un k-módulo es lo mismo que un k-espacio vectorial.

Ejemplo C.3. El espacio vectorial k^n es un $\mathbf{M}_n(k)$-módulo por izquierda (si consideramos a los elementos de k^n como vectores columna) y por derecha (si consideramos a los elementos de k^n como vectores fila).

Si A, B son dos k-álgebras, un (A, B)-bimódulo es un espacio vectorial M que es a la vez un A-módulo por izquierda y un B-módulo por derecha y tal que ambas estructuras son compatibles, en el sentido que

$$a(xb) = (ax)b, \qquad \text{para todo } a \in A, b \in B, x \in M.$$

Ejemplo C.4. Sea V un espacio vectorial y sea $\mathrm{End}(V)$ el espacio vectorial de aplicaciones lineales $V \to V$. Esta es una k-álgebra done la multiplicación está dada por composición. Entonces V tiene una estructura de $(\mathrm{End}(V), k)$-bimódulo dada por la estructura de k-espacio vectorial por la derecha, y

$$T \cdot v = T(v), \qquad \text{para todo } T \in \mathrm{End}(V), v \in V,$$

por la izquierda. De la linealidad de T se tiene que

$$T(v\lambda) = (Tv)\lambda$$

y por ende se tiene, en efecto, una estructura de bimódulo.

Si M, N son dos A-módulos, un homomorfismo de A-módulos es un homomorfismo de grupos abelianos $f : M \to N$ tal que

$$f(ax) = af(x), \qquad \text{para todo } a \in A, x \in M.$$

El núcleo de f es un submódulo de M y su imagen es un submódulo de N. Todo homomorfismo de A-módulos $f : M \to N$ induce un isomorfismo $M/\mathrm{Ker}(f) \to f(M)$ (*Primer teorema de isomorfía*).

Una sucesión de A-módulos y homomorfismos

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

se dice *exacta* en B si $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$. Una sucesión de A-módulos y homomorfismos

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_{n+2} \xrightarrow{f_{n+2}} \cdots$$

se dice exacta si es exacta en A_n para todo n. Una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

se llama una *sucesión exacta corta.* Eso sucede si y sólo si f es inyectiva, g es sobreyectiva y $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$.

C.2. Módulos sobre anillos

Sea R un anillo (conmutativo, con 1). Las definiciones anteriores pueden generalizarse del siguiente modo: Un R-módulo por izquierda es un grupo abeliano M junto con una aplicación $R \times M \to M$ que verifica

(1) $r(x + y) = rx + ry$;

(2) $(r + s)x = rx + rx$;

(3) $r(sx) = (rs)x$;

(4) $1x = x$

para todo $x, y \in M$, $r, s \in R$. La noción de módulo por derecha es análoga. Todas las demás definiciones (submódulo, módulo cociente, bimódulo, etc.) se trasladan *mutatis mutandis* a este contexto.

Todas las construcciones clásicas para grupos abelianos, como sumas directas, productos directos, etc., son análogas en el contexto de módulos.

A la categoría de R-módulos y homomorfismos de R-módulos la denotamos por R-**mod**. Esta es una categoría abeliana.

C.3. Módulos libres

Sea R un anillo. Un R-módulo M se dice *libre* si existe un subconjunto $X \subseteq M$ tal que se verifica la siguiente *propiedad universal:* Para todo R-módulo N y toda función $f : X \to N$, existe un único homomorfismo de R-módulos $f' : M \to N$ cuya restricción a X es f. En este caso también decimos que M es libre sobre X y que X es una base de M.

Observación. Para quienes conocen un poco de teoría de categorías, un módulo libre puede definirse equivalentemente de la siguiente manera: Primero, consideremos el funtor de olvido R-**mod** $\to$ **Sets** que a cada R-módulo M le asigna el conjunto subyacente de M. Este funtor admite un funtor adjunto por izquierda F : **Sets** $\to$ R-**mod**. Entonces un R-módulo libre con base X es cualquier R-módulo isomorfo a $F(X)$.

Ejercicio C.5. Sea M un R-módulo y $X \subseteq M$. Pruebe que son equivalentes:

(i) M es libre con base X;

(ii) Todo elemento x de M puede escribirse de manera única en la forma

$$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$$

para ciertos $r_i \in R$, $r_i \neq 0$ y $x_i \in X$.

(iii) $M = \bigoplus_{x \in X} Rx$.

(iv) Existe un isomorfismo $M \cong R^{\oplus |X|}$.

Dado un conjunto X, podemos construir un módulo libre con base X del siguiente modo: Sea R^X el conjunto de todas las funciones $X \to R$. El *soporte* de una función $f : X \to R$ se define como el conjunto $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$. Definimos el conjunto $F_R(X)$ como el subconjunto de R^X de todas las funciones $X \to R$ cuyo soporte es finito. Este tiene una estructura obvia de R-módulo. Para cada $x \in X$ consideramos la función $\delta_x : X \to R$ dada por $\delta_x(x) = 1$ y $\delta_x(y) = 0$ para todo $y \neq x$. Vemos entonces que para todo $f \in F_R(X)$ se tiene que

$$f = \sum_{x \in X} f(x)\delta_x.$$

Esta suma tiene sentido pues solo un número finito de los $f(x)$ es distinto de 0. Abusamos de lenguaje y escribimos x en lugar de δ_x, de modo que así podemos considerar $X \subseteq F_R(X)$.

Ejercicio C.6. Pruebe que $F_R(X)$ es un R-módulo libre con base X.

Note que si $R = \mathbb{Z}$, entonces un $\mathbb{Z}$-módulo libre es lo mismo que un grupo abeliano libre.

C.4. Producto tensorial

Sea k un cuerpo y A una k-álgebra. Sea M un A-módulo izquierdo y N un A-módulo derecho. Una aplicación $f : M \times N \to P$, donde P es k-espacio vectorial, se dice A-*balanceada* si

$$f(xa, y) = f(x, ay), \qquad \text{para todo } a \in A, x \in M, y \in N.$$

y si es k-bilineal.

Sea F el k-módulo libre con base $M \times N$. Definimos G como el submódulo de F generado por los elementos

$$(x+x', y)-(x, y)-(x, x'), \quad (x, y+y')-(x, y)-(x, y'), \quad (xa, y)-(x, ay), \quad (ux, y)-u(x, y), \quad (x, uy)-u(x, y),$$

donde $x, x' \in M$, $y, y' \in N$, $a \in A$ y $u \in k$. El cociente F/G es un grupo abeliano, denominado el *producto tensorial* de M y N sobre A y denotado por $M \otimes_A N$. A la imagen de un elemento (x, y) en $M \otimes_A N$ la denotamos por $x \otimes y$. Existe una aplicación natural $\iota : M \times N \to M \otimes_A N$ dada por $(x, y) \mapsto x \otimes y$. Es inmediato de la construcción que esta aplicación es A-balanceada.

Proposición C.7 (Propiedad universal)**.** *El producto tensorial verifica la siguiente* propiedad universal: *Para cualquier aplicación A-balanceada $f : M \times N \to P$, donde P es un k-espacio vectorial, existe una única aplicación lineal $f' : M \otimes_A N \to P$ tal que el diagrama siguiente conmuta:*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & M \otimes_A N \arrow[d, dashed, "f'"] \\ & P. \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $f : M \times N$ una aplicación A-balanceada. La aplicación f se extiende a un único homomorfismo de k-módulos (es decir, de espacios vectoriales) $\widetilde{f} : F \to P$ (por la propiedad universal de los grupos libres). Como f es A-balanceada, es claro que $G \subseteq \mathrm{Ker}(\widetilde{f})$, y por ende $\widetilde{f}$ induce una aplicación k-lineal $f' : F/G \to P$. Esto prueba la existencia de f'. La unicidad es trivial. ■

Ejercicio C.8. Pruebe que todo elemento de $M \otimes_A N$ puede escribirse (no únicamente) en la forma

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$$

con $x_i \in M$ y $y_i \in N$.

Ejercicio C.9. Sea T el subespacio vectorial de $M \otimes_k N$ generado por los elementos

$$xa \otimes y - x \otimes ay, \qquad a \in A, x \in M, y \in N.$$

Pruebe que

$$M \otimes_A N \cong (M \otimes_k N)/T.$$

Ejercicio C.10. Sean V y W dos espacios vectoriales. Sea $\{v_i \mid i \in I\}$ una base de V y $\{w_j \mid j \in J\}$ una base de W. Pruebe que $\{v_i \otimes w_j \mid i \in I, j \in J\}$ es una base de $V \otimes_k W$. En particular, pruebe que

$$\dim(V \otimes_k W) = \dim(V)\dim(W).$$

Bibliografía y lecturas recomendadas

Álgebra abstracta

- Isaacs, Martin. *Algebra, A Graduate Course.* Graduate Studies in Mathematics Vol 100. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island (2000)

- Lang, Serge. *Algebra*, Revised Third Edition. Graduate Texts in Mathematis. Springer Verlag (2002)

Teoría de representaciones "básica"

- Etingof, Pavel et al. *Introduction to representation theory.* Student Mathematical Library Vol 59. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island (2010)

- Fulton, William; Harris, Joe. *Representation Theory: A first course.* Graduate Texts in Mathematis. Springer Verlag (2004)

- Isaacs, Martin. *Character theory of finite groups*. Pure and Applied Mathematics. Academic Press INC. London (1976)
- Serre, Jean-Pierre. *Linear representations of finite groups*. Graduate Texts in Mathematics Vol 42. Springer-Verlag. New-York (1977)

Teoría de representaciones del grupo simétrico

- Ceccherini-Silberstein, Tulio; Scarabotti, Fabio; Tolli, Filippo. *Representation Theory of the Symmetric Groups. The Okounkov-Vershik Approach, Character Formulas, and Partition Algebras*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 121. Cambridge University Press (2010).
- Gordon, James; Kerber, Adalbert. *The Representation Theory of the Symmetric Group*. Enciclopedia of Mathematics and its Applications Vol. 16. Cambridge University Press (1985)
- Fulton, William. *Young Tableaux. With Applications to Representation Theory and Geometry*. London Mathematical Society Student Texts 35. Cambridge University Press (1997)

Semisimplicidad, teoría de módulos, etc.

- Kassel, Christian. *Quantum Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer Science & Business Media (1995)
- Lam, Tsit Yuen. *A First Course in Noncommutative Rings*, 2nd Edition. Graduate Texts in Mathematics. Springer Science & Business Media (2001)
- Lam, Tsit Yuen. *Lectures on Modules and Rings*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag (1999)
- Rotman, Joseph. *An Introduction to Homological Algebra*. Universitext. Springer Science & Business Media (2009)

Lecturas recomendadas

- Suzuki, Michio. *The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order*. Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 686–695.
- Tao, Terence. *The theorems of Frobenius and Suzuki on finite groups*. What's new blog. Link to the site (2013)
- Tao, Terence. *A Fourier-analytic proof of Frobenius' theorem*. What's new blog. Link to the site (2013)