Lección nº 1 EPN, Octubre 2020

1. Representaciones de grupos finitos

1.1. Definiciones básicas y ejemplos

Si G es un grupo finito, denotaremos por 1 al elemento neutro de G y por $|G|$ al orden de G (es decir, su cardinalidad).

Dado un espacio vectorial V sobre un cuerpo k, definimos $\mathrm{GL}(V)$ como el conjunto de todos los operadores lineales $\sigma : V \to V$ que son invertibles. En el caso particular en que $V = k^n$, escribimos $\mathrm{GL}(n,k)$ o $\mathrm{GL}_n(k)$ en lugar de $\mathrm{GL}(k^n)$. El conjunto $\mathrm{GL}(V)$ es un grupo para la ley interna de la composición de funciones: Si $\sigma, \tau \in \mathrm{GL}(V)$ su producto está dado por

$$\sigma\tau = \sigma \circ \tau.$$

Ejercicio 1.1. Verifique que efectivamente $\mathrm{GL}(V)$ es un grupo con la ley anteriormente descrita.

Definición. Sea G un grupo finito y V un k-espacio vectorial. Una *representación (lineal)* de G en V es un homomorfismo de grupos

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V).$$

El espacio V se llama el *espacio de representación* para ρ. La representación se dice de *dimensión finita* o de *grado finito* si V es de dimensión finita. En este caso, $\dim V$ se llama la *dimensión* o el *grado* de la representación.

Observaciones.

1. Que $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ sea un homomorfismo de grupos significa que para todo $g, h \in G$ se verifica que
$$\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$$
donde $\rho(g)\rho(h)$ es el producto de composición. Usualmente escribiremos ρ_g en lugar de $\rho(g)$, en cuyo caso la igualdad anterior se escribe como
$$\rho_{gh} = \rho_g \rho_h.$$
También escribiremos $g\,|_V$ en lugar de $\rho(g)$ o ρ_g, cuando dicha notación sea conveniente.

2. Si $x \in V$ y $g \in G$, usualmente escribiremos gx o $g(x)$ en lugar de $\rho(g)(x)$ o $\rho_g(x)$. Esto, si bien en primer lugar podría resultar confuso, es muy práctico pues aliviana mucho la escritura.

3. Supongamos que $\dim(V) = n < \infty$, entonces el espacio $\mathrm{End}(V)$ formado por todos los operadores lineales $V \to V$ es isomorfo, vía la elección de una base, al espacio de matrices $\mathbf{M}_n(k)$ y, por lo tanto, $\mathrm{GL}(V)$ es isomorfo a $\mathrm{GL}_n(k)$. Por ende, podríamos considerar como *definición* de una representación de dimensión finita a un homomorfismo $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(k)$. Sin embargo esta definición no es práctica, ya que muchas representaciones surgen naturalmente como espacios vectoriales que en general son distintos de k^n.

4. El adjetivo *lineal* no es pedantería. Podemos definir una representación de manera más general del siguiente modo: Si $\mathcal{C}$ es una categoría (ver Apéndice A) y X es un objeto de $\mathcal{C}$, escribimos $\mathrm{Aut}(X)$ para el conjunto de todos los morfismos $X \to X$ que son isomorfismos. Es fácil ver que $\mathrm{Aut}(X)$ es un grupo, y en ese caso, definimos una *representación* de un grupo G en X como un homomorfismo de grupos

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X).$$

   Cuando $\mathcal{C} = \mathbf{Vect}_k$ es la categoría de k-espacios vectoriales, recuperamos la definición de representación lineal.

   De ahora en adelante estaremos interesados solamente en representaciones lineales, por ende nos referiremos a ellas simplemente como representaciones.

5. Usualmente abusaremos de lenguaje y diremos que V es una representación de G. Cuando necesitemos hacer énfasis tanto en V como en ρ, diremos que (ρ, V) es una representación de G.

El siguiente concepto a ser definido es el de morfismo de representaciones:

Definición. Sean (ρ, V) y (η, W) dos representaciones de un grupo G. Un *morfismo de representaciones* es un aplicación lineal $f : V \to W$ tal que para todo $g \in G$ se verifica

$$f \circ \rho(g) = \eta(g) \circ f,$$

es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho(g)"'] & W \arrow[d, "\eta(g)"] \\ V \arrow[r, "f"'] & W. \end{tikzcd}$$

Al conjunto de morfimos de representaciones $V \to W$ lo denotamos por $\mathrm{Hom}_G(V, W)$. Este es claramente un espacio vectorial.

Si $f : V \to W$ es un morfismo de representaciones, diremos que f es un *isomorfismo* si existe un morfismo de representaciones $g : W \to V$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_W$ y $g \circ f = \mathrm{id}_V$.

Observación. Notemos que si G es un grupo finito, existe una categoría $\mathbf{Rep}_k(G)$ cuyos objetos son las representaciones de G sobre k-espacios vectoriales y cuyos morfismos son los morfismos de representaciones.

Ejercicio 1.2. Muestre que, similar a lo que ocurre con otras estructuras como espacios vectoriales, grupos, etc., un morfismo de representaciones f es un isomorfismo si y sólo si es una biyección.

A continuación daremos una lista de ejemplos, algunos de los cuales son vitales dentro del estudio de la teoría de representaciones de grupos finitos.

Ejemplo 1.3 (Grupo de caracteres)**.** Sea V un espacio vectorial de dimensión 1 y $v \in V$, $v \neq 0$. Consideremos las aplicaciones lineales $V \to k$ y $k \to V$ dadas por $\lambda v \mapsto \lambda$ y $\lambda \mapsto \lambda v$, respectivamente. Estas claramente son inversas una de la otra y además, si $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ es una representación de un grupo finito G, para cada $g \in G$ tenemos que $\rho_g(v) = \lambda_g v$ para cierto

$\lambda_g \neq 0$. Definimos una representación $\rho' : G \to k^*$ (aquí hemos identificado a $\mathrm{GL}(k)$ con k^*) mediante $\rho'_g(1) = \lambda_g$, e inmediatamente vemos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & k \\ {\scriptstyle \rho_g}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \rho'_g} \\ V & \longrightarrow & k \end{array}$$

conmuta para todo $g \in G$, por lo que las representaciones ρ y ρ' son isomorfas. Esto muestra que todas las representaciones de dimensión 1 de G son isomorfas a una representación de G en k.

Al conjunto de todas las representaciones $\chi : G \to k^*$ de dimensión 1 de G en k lo denotamos por $\hat{G}$ y lo llamamos el *grupo de caracteres* de G. Este es en efecto un grupo, donde si $\chi, \psi \in \hat{G}$, el producto $\chi\psi$ está definido por

$$(\chi\psi)(g) = \chi(g)\psi(g), \qquad \text{para todo } g \in G.$$

Notemos que $\hat{G}$ es un grupo abeliano. Al elemento neutro de $\hat{G}$ se lo llama la *representación trivial* de G. Específicamente, la representación trivial es el homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{1}: & G & \longrightarrow & k^* \\ & g & \longmapsto & 1. \end{array}$$

Para algunos autores, la representación trivial de G en un espacio vectorial V (no necesariamente de dimensión 1) es el homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \rho: & G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V) \\ & g & \longmapsto & \mathrm{id}_V \end{array}$$

y a la representación $\mathbf{1}$ la llaman la *representación trivial de dimensión* 1.

Ejercicio 1.4. Sea $\chi \in \hat{G}$. Pruebe lo siguiente:

(a) Para todo $g, h \in G$ se verifica $\chi(hgh^{-1}) = \chi(g)$ (esto significa que χ es una *función de clases*).

(b) Si $n = |G|$ entonces $\chi(g)$ es una raíz n-ésima de la unidad.

(c) $\chi^{-1} = \dfrac{1}{\chi}$.

Observación. El nombre *grupo de caracteres* no es accidental. Veremos más adelante que los elementos de $\hat{G}$ son ejemplos de caracteres.

Ejemplo 1.5 (Representación de permutación)**.** Sea G un grupo finito y sea X un conjunto finito sobre el cual G actúa (ver Apéndice B). Sea V un espacio vectorial con base $\{e_x \mid x \in X\}$ indexada por los elementos del conjunto X. Definimos entonces una representación $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ mediante

$$\rho_g(e_x) = e_{gx}, \qquad \text{para todo } x \in X, g \in G.$$

El operador ρ_g está definido sobre la base $\{e_x \mid x \in X\}$, por lo que está bien definido (recordemos que una aplicación lineal queda completamente determinada por las imágenes de los elementos de una base).

Escrito en una notación menos sobrecargada, tenemos

$$ge_x = e_{gx}.$$

De este modo, si $v \in V$, podemos escribir $v = \sum_{x \in X} \alpha_x e_x$ y tenemos

$$gv = \sum_{x\in X} \alpha_x e_{gx} = \sum_{x \in X} \alpha_{g^{-1}x} e_x.$$

Ejemplo 1.6 (Representación regular)**.** Sea G un grupo finito y R un espacio vectorial con base $\{e_g \mid g \in G\}$ indexada por los elementos de G. La *representación regular* de G es el homomorfismo $\mathfrak{r} : G \to \mathrm{GL}(R)$ definido por

$$\mathfrak{r}_g(e_h) = e_{gh}, \qquad \text{para todo } g, h \in G.$$

Note que si $X = G$ y G actúa sobre sí mismo por multiplicación izquierda, es decir, si $g \cdot h = gh$, entonces la representación regular es la representación de permutación asociada a esta acción.

Ejercicio 1.7. Sea V un espacio vectorial, $v \in V$ y sea $\rho : G \to V$ una representación tal que el conjunto $\{\rho_g(v) \mid g \in G\}$ es una base de V. Pruebe que ρ es isomorfa a la representación regular.

Recíprocamente, si R es la representación regular, con base $\{e_g \mid g \in G\}$, note que $\{\mathfrak{r}_g(e_1) = e_g \mid g \in G\}$ es una base de R.

1.2. El álgebra de grupo y módulos

La representación regular es vital en el estudio de la teoría de representaciones de grupos finitos. Por este motivo, daremos una descripción adicional de esta, a la vez que introducimos nuevos conceptos que serán de mucha utilidad en lo posterior.

Dado un grupo finito G, sea V un espacio vectorial con base $\mathcal{B} = \{e_g \mid g \in G\}$ indexada por los elementos de G. Consideremos la función

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B} \times \mathcal{B} : & \longrightarrow & V \\ (e_g, e_h) & \longmapsto & e_{gh}. \end{array}$$

Por bilinealidad, esta aplicación define una única aplicación bilineal $\mu : V \times V \to V$ dada por

$$(e_g, e_h) \longmapsto e_{gh}$$

o, siendo más descriptivos,

$$\left(\sum_{g \in G} \alpha_g e_g, \sum_{g\in G} \beta_g e_g \right) \longmapsto \sum_{g \in G} \left(\sum_{hh' = g} \alpha_h \beta_{h'} \right) e_g.$$

Escribimos $\mu(v, w) = vw$, de este modo, tenemos que

$$\left(\sum_{g \in G} \alpha_g e_g \right) \left(\sum_{g\in G} \beta_g e_g \right) = \sum_{g \in G} \left(\sum_{hh' = g} \alpha_h \beta_{h'} \right) e_g$$

y se puede verificar sin problema que V con esta operación es una k-álgebra (es decir un espacio vectorial que a la vez es un anillo tal que la multiplicación del anillo es bilineal). Por comodidad y por razones *psicológicas* escribiremos g en lugar de e_g, de modo que con esta identificación G es la base de V y tenemos la igualdad

$$\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right) \left(\sum_{g\in G} \beta_g g \right) = \sum_{g \in G} \left(\sum_{hh' = g} \alpha_h \beta_{h'} \right) g.$$

Definición. La k-álgebra construida anteriormente se llama el *álgebra de grupo* de G sobre k y se denota por $k[G]$ o más simplemente por kG.

Dado que tenemos un álgebra, la pregunta natural que surge es ¿Cómo son los módulos sobre esta álgebra? La respuesta es, abrumadoramente hermosa (y confieso que este fue quizá el hecho que despertó completamente mi interés por la Teoría de Representaciones):

$$\boxed{\textit{Un } k[G]\textit{-módulo es lo mismo que una representación de } G.}$$

En efecto, si (ρ, V) es una representación de G, definimos el $k[G]$-módulo M_ρ como sigue: Como conjuntos $M = V$ y, para $v \in V$ y $\sum\limits_{g\in G} \alpha_g g \in k[G]$,

$$\left(\sum_{g\in G} \alpha_g g\right) v = \sum_{g\in G} \alpha_g \rho_g(v).$$

Recíprocamente si M es un $k[G]$-módulo, en particular M es un k-espacio vectorial (ver apéndice C) y definimos una representación $\rho_M : G \to \mathrm{GL}(M)$ mediante

$$\rho_g(m) = gm, \qquad \text{para todo } g \in G, m \in M.$$

Ejercicio 1.8. Pruebe que efectivamente M_ρ es un $k[G]$-módulo y que ρ_M es una representación de G en M.

Ejercicio 1.9. Muestre que un morfismo de representaciones de G es lo mismo que un homomorfismo de $k[G]$-módulos.

Ejercicio 1.10 (Para quienes están familiarizados con la teoría de categorías)**.** Hemos definido funtores $\mathbf{Rep}(G) \to k[G]\text{-}\mathbf{mod}$ y $k[G]\text{-}\mathbf{mod} \to \mathbf{Rep}(G)$ dados por $\rho \mapsto M_\rho$ y $M \mapsto \rho_M$, respectivamente. Pruebe que estos funtores son mutuamente inversos y por ende definen una equivalencia de categorías $\mathbf{Rep}(G) \cong k[G]\text{-}\mathbf{mod}$.

Notemos que, en particular $k[G]$ es un espacio vectorial con base G (indexada por los elementos de G), y que

$$g\left(\sum_{h\in G} \alpha_h h\right) = \sum_{h\in G} \alpha_h gh = \sum_{h\in G} \alpha_{g^{-1}h} h,$$

y por ende $k[G]$, considerado como $k[G]$-módulo, es precisamente la representación regular de G.

Ejercicio 1.11. Describa a qué corresponde la representación trivial como $k[G]$-módulo.

Observación. La discusión precedente es el puente entre la teoría de representaciones de grupos y la teoría de representaciones de álgebras asociativas. En este cursillo no atacaremos esta última, sin embargo, el álgebra de grupo jugará un papel fundamental cerca del final del mismo.

1.3. Subrepresentaciones

Definición. Dada una representación $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ de un grupo finito G, una *subrepresentación* de V es un subespacio vectorial W de V tal que $g(W) \subseteq W$ para todo $g \in G$, es decir, que es G-estable.

Ejercicio 1.12. Pruebe que una subrepresentación de V es lo mismo que un $k[G]$-submódulo de V.

Observación. Notemos que si $g(W) \subseteq W$ para todo $g \in G$, en particular tenemos que $g^{-1}(W) \subseteq W$ y aplicando g a esta inclusión, obtenemos $W = gg^{-1}(W) \subseteq g(W)$. Así en realidad se verifica $g(W) = W$ y podríamos tomar esta condición como la definición de una subrepresentación. En el futuro usaremos ya sea $g(W) \subseteq W$ o $g(W) = W$ según la que nos sea conveniente. Esto no será problema pues, como acabamos de ver, ambas condiciones son equivalentes.

Ejemplo 1.13. Sea V un espacio vectorial, y sea $\rho : G \to V$ la representación definida por $\rho_g = \mathrm{id}_V$ para todo $g \in G$. Entonces, para cualquier $v \in V$, con $v \neq 0$, tenemos que $W = kv$ es una subrepresentación de V. En efecto, si $w \in W$, tenemos $g(w) = w$ y de este modo $g(W) = W$. Más generalmente, si W es cualquier subespacio vectorial de V, entonces $g(W) = W$ y por ende W es una subrepresentación de V.

Ejemplo 1.14. Supongamos que k es un cuerpo cuya característica es distinta de 2 y de 3 (por ejemplo, tome $k = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$). Consideremos $G = S_3$ el grupo simétrico. Recordemos que, en general, el grupo simétrico S_n es el conjunto de funciones biyectivas $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, equipado con la estructura de grupo dada por la composición. Para cada $\sigma \in S_3$ y cada $(x_1, x_2, x_3) \in k^3$, definimos

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) = \left(x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, x_{\sigma^{-1}(3)}\right),$$

y de este modo obtenemos una representación de S_3 en k^3. Siendo más pedantes: $\rho : S_3 \to \mathrm{GL}(k^3)$ está dada por

$$\rho_\sigma(x_1, x_2, x_3) = \left(x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, x_{\sigma^{-1}(3)}\right), \qquad \text{para todo } \sigma \in S_3, (x_1, x_2, x_3) \in k^3.$$

Note que si $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ y $e_3 = (0, 0, 1)$ es la base canónica de k^3, entonces $\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$ para todo $\sigma \in S_3$ y $j \in \{1, 2, 3\}$ y ρ es precisamente la representación de permutación asociada esta la acción de S_3 sobre la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Sean $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in k^3 \mid x_1 = x_2 = x_3\} = k(1, 1, 1)$. Notemos que W es una subrepresentación de k^3 (esto es muy trivial, pero si no es claro para usted ¡verifíquelo!). Consideremos también

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in k^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Esta también es una subrepresentación de k^3. En efecto, si $(x_1, x_2, x_3) \in V$ entonces $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ y si $\sigma \in S_3$, tenemos que $\sigma(x_1, x_2, x_3) = \left(x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, x_{\sigma^{-1}(2)}\right)$ y además

$$x_{\sigma^{-1}(1)} + x_{\sigma^{-1}(2)} + x_{\sigma^{-1}(3)} = x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

de modo que $g(V) \subseteq V$.

En este caso tenemos además que $k^3 = W \oplus V$. Esto **no** es una coincidencia.

Ejercicio 1.15. Demuestre que si la característica de k es igual a 3, entonces $W \subseteq V$.

Proposición 1.16. *Sean V y W dos representaciones de G y $f : V \to W$ un morfismo de representaciones. Entonces* $\mathrm{Ker}(f)$ *es una subrepresentación de V y* $\mathrm{Img}(f) = f(V)$ *es una subrepresentación de W.*

Demostración. Sea $v \in \mathrm{Ker}(f)$, entonces $f(v) = 0$. Dado $g \in V$, tenemos que

$$f(gv) = gf(v) = g0 = 0,$$

lo que implica que $gv \in \mathrm{Ker}(f)$. De este modo $g(\mathrm{Ker}(f)) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, lo que significa que $\mathrm{Ker}(f)$ es una subrepresentación de V.

Sea ahora $w \in f(V)$, entonces $w = f(v)$ para cierto $v \in V$. Sea $g \in G$, entonces

$$gw = gf(v) = f(gv) \in f(V),$$

lo que prueba que $g(f(V)) \subseteq f(V)$ y por ende que $f(V)$ es una subrepresentación de W. ■

1.4. Construcción de representaciones

Durante esta subsección, asumiremos que $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\eta : G \to \mathrm{GL}(W)$ son dos representaciones de un grupo finito G.

Definición. La *suma directa* de V y W es la representación

$$V \oplus W = \{(v, w) \mid v \in V, w \in W\}$$

con la estructura de espacio vectorial usual y la acción de G definida por

$$g(v, w) = (gv, gw), \qquad \text{para todo } g \in G, v \in V, w \in W.$$

Siendo más precisos, la suma directa de ρ y η es la representación $\rho \oplus \eta : G \to \mathrm{GL}(V \oplus W)$ dada por

$$(\rho \oplus \eta)_g(v, w) = (\rho_g(v), \rho_g(w)), \qquad \text{para todo } g \in G, v \in V, w \in W.$$

Notemos que si fijamos una base (ordenada) $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ para V y $(f_j)_{j=1,\dots,m}$ para W, entonces el conjunto $\mathcal{B} = ((e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, f_1), \dots, (0, f_m))$ es una base (ordenada) para $V \oplus W$. En este caso, si T_g es la matriz de $g\,|_V$ y T'_g es la matriz de $g\,|_W$ en las bases anteriores, entonces

$$\begin{pmatrix} T_g & 0 \\ 0 & T'_g \end{pmatrix}$$

es la matriz de $g\,|_{V \oplus W}$ en la base $\mathcal{B}$.

Ejercicio 1.17. Muestre que si V y W son subrepresentaciones de una misma representación U, y si $V \cap W = 0$, entonces su suma $V + W$ como subespacios vectoriales también es una subrepresentación de U que además es isomorfa a $V \oplus W$. En este caso también escribiremos $V \oplus W$ en lugar de $V + W$ y diremos que esta es la suma directa (interna) de V y W. El significado de $\oplus$ siempre será claro por el contexto.

Notemos que para cada $g \in G$ la aplicación $V \times W \to V \otimes_k W$ definida por $(v, w) \mapsto (gv) \otimes (gw)$ es una aplicación bilineal y por ende induce una única aplicación lineal $V \otimes_k W \to V \otimes_k W$ tal que

$$v \otimes w \longmapsto (gv) \otimes (gw), \qquad \text{para todo } v \in V, w \in W.$$

Esta aplicación es claramente invertible, cuya inversa es la única aplicación lineal que verifica

$$v \otimes w \longmapsto (g^{-1}v) \otimes (g^{-1}w), \qquad \text{para todo } v \in V, w \in W.$$

Esto motiva la siguiente definición:

Definición. El *producto tensorial* de V y W es la representación $V \otimes_k W$ (escrita más sencillamente como $V \otimes W$) donde la acción de G sobre $V \otimes W$ está dada por

$$g(v \otimes w) = (gv) \otimes (gw), \qquad \text{para todo } g \in G, v \in V, w \in W.$$

Igual que antes, podemos precisar un poco más: La representación $\rho \otimes \eta : G \to \mathrm{GL}(V \otimes W)$ está dada por

$$(\rho \otimes \eta)_g(v \otimes w) = \rho_g(v) \otimes \eta_g(w), \qquad \text{para todo } g \in G, v \in V, w \in W.$$

Denotaremos por $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ (o más sencillamente por $\mathrm{Hom}(V, W)$) al k-espacio vectorial de aplicaciones lineales de V en W. Tenemos que $\mathrm{Hom}(V, W)$ también es una representación de G, donde la acción de G sobre $\mathrm{Hom}(V, W)$ se describe como sigue: Dado $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, entonces

$$(g\varphi)(v) = g(\varphi(g^{-1}v)), \qquad \forall g \in G, v \in V.$$

Más precisamente, tenemos una representación $\theta : G \to \mathrm{GL}(\mathrm{Hom}(V, W))$ dada por

$$\theta_g(\varphi) = \eta_g \circ \varphi \circ \rho_{g^{-1}} = \eta_g \circ \varphi \circ \rho_g^{-1}, \qquad \text{para todo } g \in G.$$

Notemos que claramente θ_g es una biyección, con inversa $\theta_{g^{-1}}$ y tenemos que

$$\begin{aligned}
\theta_{gh}(\varphi) &= \eta_{gh} \circ \varphi \circ \rho_{(gh)^{-1}} \\
&= \eta_g \circ \eta_h \circ \varphi \circ \rho_{h^{-1}g^{-1}} \\
&= \eta_g \circ \eta_h \circ \varphi \circ \rho_{h^{-1}} \circ \rho_{g^{-1}} \\
&= \theta_g(\theta_h(\varphi)),
\end{aligned}$$

por lo que efectivamente θ es un representación de G.

Denotemos por V^* al dual (algebraico) de V y por $\langle \cdot, \cdot \rangle : V^* \times V \to k$ al emparejamiento dual usual, es decir

$$\langle \varphi, v \rangle = \varphi(v), \qquad \text{para todo } \varphi \in V^*, v \in V.$$

Cuando $W = k$ es la representación trivial, en lo anterior tenemos que $\mathrm{Hom}(V, k) = V^*$ y así:

Definición. La *representación dual* de G en V^* es la representación definida por

$$(g\varphi)(v) = \varphi(g^{-1}v)$$

Precisando, al igual que lo hemos venido haciendo, la representación dual ρ^* de la representación ρ está dada por

$$\rho_g^*(\varphi)(v) = \langle \varphi, \rho_{g^{-1}}(v) \rangle = \langle {}^t\rho_{g^{-1}}(\varphi), v \rangle, \qquad v \in V,$$

de modo que

$$\rho_g^* = {}^t\rho_{g^{-1}}.$$

Ejercicio 1.18. Demuestre que la representación dual es la única representación de G tal que

$$\langle g\varphi, gv \rangle = \langle \varphi, v \rangle, \qquad \text{para todo } \varphi \in V^*, v \in V.$$

Ejercicio 1.19. Demuestre que la aplicación lineal

$$f : V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W)$$

definida para cada $\varphi \in V^*$ y $w \in W$ por

$$f(\varphi \otimes w) : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ v & \longmapsto & \langle \varphi, v \rangle w \end{array}$$

está bien definida y es un morfismo de representaciones. Además, muestre que si V es de dimensión finita, entonces f es un isomorfismo de representaciones. (*Ayuda:* Mire el ejercicio 1.2).

Ejercicio 1.20 (Para quienes saben un poco más de tensores)**.** Vamos a generalizar un poco el producto tensorial de dos representaciones:

(a) Denotemos por $V^{\otimes n}$ el producto tensorial de n copias de V. Pruebe que $V^{\otimes n}$ es una representación de G.

(b) Denotemos por $\bigwedge^n(V)$ la n-ésima potencia exterior de V y por $S^n(V)$ la n-ésima potencia simétrica de V. Muestre que $\bigwedge^n(V)$ y $S^n(V)$ son representaciones de G. Además, muestre que si la característica de k no es 2, entonces

$$V \otimes V \cong S^2(V) \oplus \bigwedge^2(V)$$

como representaciones.

Para finalizar, presentamos otra construcción que suele ser útil. Si V es una representación de G y $W \subseteq V$ es una subrepresentación, entonces el espacio vectorial V/W es también una representación de G, donde

$$g(v + W) = (gv) + W, \qquad \text{para todo } g \in G, v \in V.$$

Siendo más precisos, si escribimos $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ para la representación de G en V, entonces definimos $\widetilde{\rho} : G \to \mathrm{GL}(V/W)$ por

$$\widetilde{\rho}_g(v + W) = \rho_g(v) + W, \qquad \text{para todo } g \in G, v \in V.$$

Es fácil probar que $\widetilde{\rho}$ está bien definida y que es una representación. Esta representación se denomina la *representación cociente*. Además, tenemos que la aplicación cociente $\pi : V \to V/W$ es un morfismo de representaciones, pues

$$\pi(gv) = (gv) + W = g(v + W) = g\pi(v), \qquad g \in G, v \in V.$$

Ejercicio 1.21 (Primer teorema de isomorfía de Noether)**.** Sea $f : V \to V'$ un morfismo de representaciones y W una subrepresentación de V tal que $W \subseteq \mathrm{Ker}(f)$. Demuestre que f induce un único homomorfismo $\widetilde{f} : V/W \to V'$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & V/W \arrow[d, dashed, "\widetilde{f}"] \\ & V' \end{tikzcd}$$

conmuta. Más aún, $\widetilde{f}$ es un monomorfismo si y sólo si $W = \mathrm{Ker}(f)$. Deduzca que

$$V/\mathrm{Ker}(f) \cong f(V)$$

como representaciones.

1.5. Representaciones irreducibles e indescomponibles: El teorema de Maschke

Definición. Sea G un grupo finito y $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación de G en un espacio vectorial V sobre k.

(i) Decimos que V es una representación *irreducible* o *simple* si sus únicas subrepresentaciones son V y 0.

(ii) Decimos que V es una representación *indescomponible* si no existen subrepresentaciones W y W' de V distintas de 0 tales que $V = W \oplus W'$.

Lema 1.22. *Toda representación irreducible es indescomponible.*

Demostración. Supongamos que V no es indescomponible. Entonces existen W, W' dos subrepresentaciones distintas de 0 tales que $V = W \oplus W'$. Se sigue que como $W' \neq 0$, entonces $W \neq V$ y también $W \neq 0$, por ende V tiene una subrepresentación distinta de V y de 0 y así no es irreducible. ■

Ejemplo 1.23. Toda representación de dimensión 1 es irreducible y por ende indescomponible.

Ejemplo 1.24. Supongamos que k es de característica distinta de 2 y de 3. Consideremos la representación de S_3 en k^3 dada en el ejemplo 1.14, así como las subrepresentaciones W y V. Vemos en este caso que k^3 *no* es una representación irreducible ni indescomponible de k^3. Como $\dim(W) = 1$, entonces W es irreducible. Veamos que V también es irreducible. Para ello, sea $V' \neq 0$ una subrepresentación de V. Como $\dim(V) = 2$, entonces $\dim(V') \in \{1, 2\}$, por ende, basta probar que $\dim(V') = 2$.

Sea $0 \neq x = (x_1, x_2, x_3) \in V'$. Consideremos dos posibilidades:

- Si para algún $i \in \{1, 2, 3\}$ se tiene que $x_i = 0$, sea $\tau = (1\ i) \in S_3$ la transposición que intercambia 1 e i (la identidad si $i = 1$), entonces $\tau x = (x'_1, x'_2, x'_3) \in V'$ con $x'_1 = 0$. Entonces, como $V' \subseteq V$ se tiene que $0 = x'_2 + x'_3$ y por ende $x'_2 = -x'_3$. Por ende $(0, 1, -1) \in V'$. Pero entonces $(1\ 2)(0, 1, -1) = (1, 0, -1) \in V'$ y los vectores $(0, 1, -1)$ y $(1, 0, -1)$ son linealmente independientes.

- Si para todo $i \in \{1, 2, 3\}$ se tiene que $x_i \neq 0$. Como la característica de k es distinta de 3, entonces existen $i, j \in \{1, 2, 3\}$ tales que $x_i \neq x_j$. Aplicando un elemento de S_3 a x, podemos asumir que $x_1 \neq x_2$. En este caso, los vectores (x_1, x_2, x_3) y (x_2, x_1, x_3) son linealmente independientes (¿Por qué?).

Ejemplo 1.25. Supongamos que la característica de k es 3. Entonces, en el Ejemplo 1.14 se tiene que $W \subseteq V$. Por ende V no es irreducible. No obstante, *V sí es indescomponible*: Supongamos que existen subrepresentaciones $U, U' \subseteq V$ tales que $V = U \oplus U'$, entonces $U \cap W = 0$ o $U \cap W' = 0$ (o ambos). Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $U \cap W = 0$. Sea $0 \neq x = (x_1, x_2, x_3) \in U$. Como $U \cap W = 0$, entonces, aplicando un elemento apropiado de S_3, podemos asumir que $x_1 \neq x_2$, y por ende los vectores (x_1, x_2, x_3) y (x_2, x_1, x_3) pertenecen a U y son linealmente independientes. Pero esto es absurdo, pues $\dim(V) = 2$ y $\dim(U') = 1$. Así no existen tales subrepresentaciones U y U', lo que significa que V es indescomponible.

De momento sabemos que toda representación irreducible es indescomponible, y el ejemplo anterior muestra que el recíproco es, en general, falso. Sin embargo, bajo condiciones apropiadas, podemos decir más al respecto:

Teorema 1.26. *Sean k un cuerpo y G un grupo finito. Si* $\operatorname{char}(k) \nmid |G|$, *entonces toda representación indescomponible de G en un k-espacio vectorial es irreducible.*

Este teorema será una consecuencia inmediata del siguiente resultado.

Teorema 1.27. *Sean k un cuerpo y G un grupo finito tales que* $\operatorname{char}(k) \nmid |G|$. *Sea V una representación de G y $W \subseteq V$ una subrepresentación. Entonces existe una subrepresentación $W' \subseteq V$ tal que $V = W \oplus W'$.*

Demostración. La hipótesis $\operatorname{char}(k) \nmid |G|$ equivale a $|G| \neq 0$ en k. Sea W_0 cualquier subespacio de V suplementario de W, es decir, tal que $V = W + W'$ y $W \cap W' = 0$. Sea $p_0 : V \to V$ la proyección de V sobre W paralela a W_0. Esto es, dado que cualquier vector $v \in V$ se escribe de manera única en la forma $v = w + w_0$ con $w \in W$ y $w_0 \in W_0$, entonces $p_0(v) = w$. Note que en particular $p_0(V) = W$ y $\operatorname{Ker}(p_0) = W_0$. Definimos una aplicación $p : V \to V$ como sigue:

$$p(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g p_0(g^{-1}v), \qquad \text{para todo } v \in V,$$

o, si queremos ser más precisos, llamando $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ a la representación de G en V,

$$p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_g \circ p_0 \circ \rho_g^{-1}.$$

Probaremos varias propiedades de esta aplicación:

(i) $p(V) = W$. En efecto, sea $v \in V$, entonces $p_0(g^{-1}v) \in W$ para todo $g \in G$ y por ende $gp_0(g^{-1}v) \in W$ (pues W es una subrepresentación), de modo que

$$p(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g p_0(g^{-1}v) \in W.$$

Esto prueba que $p(V) \subseteq W$. Ahora, si $w \in W$, entonces $g^{-1}w \in W$ (nuevamente, pues W es una subrepresentación) y $p_0(g^{-1}w) = g^{-1}w$ (pues p_0 es una proyección sobre W), de modo que

$$p(w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g p_0(g^{-1}w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g g^{-1} w = w,$$

lo que implica que $w \in p(V)$ y por ende que $W \subseteq p(V)$.

(ii) $p^2 = p$, es decir, p es una proyección. En efecto, si $v \in V$, por la parte (i) tenemos que $p(v) \in W$ y de este modo $g^{-1}p(v) \in W$ lo que implica que $p_0(g^{-1}p(v)) = g^{-1}p(v)$. Con esto

$$\begin{aligned} p^2(v) &= p(p(v)) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g p_0(g^{-1}p(v)) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g g^{-1} p(v) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} p(v) \\ &= p(v). \end{aligned}$$

(iii) $p : V \to V$ es un morfismo de representaciones: En efecto, sea $h \in G$ y $v \in V$, entonces

$$p(hv) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g p_0(g^{-1}hv) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} h g p_0(g^{-1}v) = hp(v).$$

Con esto, sea $W' = \operatorname{Ker}(p)$. Por (iii) y la Proposición 1.16 tenemos que W' es una subrepresentación de V. Por (i) y (ii) $p : V \to V$ es una proyección sobre W paralela a W', lo que significa que $V = W \oplus W'$. Esto completa la demostración. ■

Demostración del Teorema 1.26. Sea V una representación indescomponible de G y supongamos que V no es irreducible. Entonces existe una subrepresentación $W \subseteq V$ distinta de 0 y de V y por el teorema anterior existe una subrepresentación $W' \subseteq V$ tal que $V = W \oplus W'$. Como $W \neq V$, entonces $W' \neq 0$, lo que contradice la indescomponibilidad de V. ■

Ejercicio 1.28 (Teorema 1.27 para representaciones complejas)**.** En ese ejercicio asumiremos que $k = \mathbb{C}$. El objetivo es dar una demostración distinta del Teorema 1.27 en este caso. Nótese que $\operatorname{char}(\mathbb{C}) = 0$ y por ende la condición $\operatorname{char}(k) \nmid |G|$ se satisface trivialmente.

(a) Fije un producto interno $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ (¿Por qué existe tal producto interno?) y defina

$$(v,w)_G = \sum_{g\in G} (gv, gw), \qquad \text{para todo } v, w \in V.$$

Pruebe que $(\cdot,\cdot)_G : V \times V \to \mathbb{C}$ es un producto interno sobre V.

(b) Demuestre que $(\cdot,\cdot)_G$ es G-invariante, en el sentido de que

$$(gv, gw)_G = (v,w)_G, \qquad \text{para todo } v, w \in V, g \in G.$$

(c) Sea $W' = W^{\perp}$ el complemento ortogonal de W respecto al producto interno $(\cdot,\cdot)_G$. Pruebe que W' es una subrepresentación de V.

(d) Concluya.

Corolario 1.29 (Teorema de Maschke)**.** *Si* $\operatorname{char}(k) \nmid |G|$*, entonces toda representación de dimensión finita de* G *es una suma directa de subrepresentaciones irreducibles.*

Demostración. Sea V una representación de G de dimensión finita. Probaremos el resultado por inducción sobre $\dim(V)$. Si $\dim(V) = 1$, entonces V es irreducible y no hay nada que probar.

Asumamos que $\dim(V) > 1$ y que el resultado es cierto para todo espacio vectorial de dimensión $< \dim(V)$. Si V es irreducible no hay nada que probar. Supongamos entonces que V no es irreducible. Por el Teorema 1.26 V no es indescomponible, lo que significa que existen $W, W' \subseteq V$ dos subrepresentaciones distintas de 0 tales que $V = W \oplus W'$. Por hipótesis de inducción, W y W' son suma directa de subrepresentaciones irreducibles, y por ende lo es V. ■

Definición. Una representación V de un grupo finito G se dice *completamente reducible* o *semisimple* si V puede descomponerse en la suma directa de subrepresentaciones irreducibles.

Entonces hemos probado que

Proposición 1.30. *Si* $\operatorname{char}(k) \nmid |G|$*, toda representación de dimensión finita de* G *es completamente reducible.*

Observación (Para los conocedores de la teoría de anillos y álgebras semisimples)*.* En el lenguaje de $k[G]$-módulos, tenemos que V es una representación irreducible de G si y sólo si V es un $k[G]$-módulo simple, por ende el teorema de Maschke puede formularse del siguiente modo:

Si $\operatorname{char}(k) \nmid |G|$*, el álgebra* $k[G]$ *es semisimple.*

Más aún, el recíproco de este teorema también es cierto, es decir, si $k[G]$ es un álgebra semisimple, entonces $\mathrm{char}\,(k) \nmid |G|$.

El caso $\mathrm{char}\,(k) \mid |G|$ es considerablemente más complicado que el caso que hemos estado estudiando. Esto se debe a que si $\mathrm{char}\,(k) \mid |G|$, entonces $|G| = 0$ en k y todos los argumentos usados anteriormente fallan (nótese que es vital en las demostraciones precedentes que $|G| \neq 0$ en k). Este caso corresponde a lo que se conoce como *Teoría de representaciones modulares.*

En lo que sigue, todas las representaciones se asumen de dimensión finita y completamente reducibles.

En virtud de lo anterior, denotamos por $\mathbf{Rep}_k^0(G)$ la categoría de representaciones de dimensión finita del grupo G. Esta es una subcategoría plena de $\mathbf{Rep}_k(G)$. Cuando $k = \mathbb{C}$, denotaremos simplemente por $\mathbf{Rep}(G)$ y $\mathbf{Rep}^0(G)$ a estas categorías.

Sea G un grupo finito y V una representación. Por el teorema de Maschke podemos descomponer V en una suma directa

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r,$$

donde cada sumando directo W_j es una subrepresentación irreducible de V. Ahora, podemos agrupar a estas representaciones según su clase de isomorfía. Es decir, podemos escribir $\{1, \ldots, r\} = I_1 \cup \cdots \cup I_m$ tal que $I_i \cap I_j = \emptyset$ y tal que para cada $\ell \in \{1, \ldots, m\}$ las representaciones W_i y W_j sean isomorfas para todo $i, j \in I_\ell$. En este caso, si escogemos un representante W_i de cada clase de isomorfía, para $i \in \{1, \ldots, m\}$, escribimos

$$V \cong W_1^{\oplus n_1} \oplus \cdots \oplus W_m^{\oplus n_m}$$

donde $n_\ell = |I_\ell|$. También escribimos

$$V \cong n_1 W_1 \oplus \cdots \oplus n_m W_m.$$

En ocasiones seremos incluso más abusivos con el lenguaje, escribiendo igualdades en lugar de isomorfismos. Esto tendrá su ventaja cuando presentemos las *representaciones virtuales* en el apartado de teoría de caracteres.

Definición. A los enteros n_j en la descomposición

$$V \cong W_1^{\oplus n_1} \oplus \cdots \oplus W_m^{\oplus n_m}$$

se los llama la *multiplicidad de W_j en V.*

Intuitivamente, n_j es el número de veces que la representación V contiene a la representación irreducible W_j.

Para cerrar esta subsección, presentamos un resultado elemental pero a la vez fundamental en el estudio de la teoría de representaciones:

Teorema 1.31 (Lema de Schur)**.** *Sean V, W dos representaciones* **irreducibles** *de G y sea $f : V \to W$ un morfismo de representaciones. Entonces*

(i) *O bien $f = 0$ o bien f es un isomorfismo.*

(ii) *Si $V = W$ y k es algebraicamente cerrado, entonces f es una homotecia, es decir, $f = \lambda id_V$ para cierto $\lambda \in k$.*

Demostración. Por la Proposición 1.16 sabemos que $\mathrm{Ker}(f)$ es una subrepresentación de V y $f(V)$ es una subrepresentación de W. Como V y W son irreducibles entonces $\mathrm{Ker}(f) = 0$ o $\mathrm{Ker}(f) = V$ y $f(V) = 0$ o $f(V) = W$. Si $\mathrm{Ker}(f) = V$ o si $f(V) = 0$ entonces $f = 0$. Si $\mathrm{Ker}(f) = 0$ entonces $f(V) \neq 0$ y por ende $f(V) = W$, así f es un isomorfismo. Esto prueba (i)

Para probar (ii) sea λ un valor propio de f (este existe pues asumimos que k es algebraicamente cerrado) y sea $f' = f - \lambda \mathrm{id}_V$. Entonces f' es un morfismo de representaciones (verificarlo) y además $\mathrm{Ker}(f') \neq 0$ pues contiene al menos un vector propio de f. De este modo, f' no puede ser inyectiva y por la parte (i) se sigue que $f' = 0$, es decir, $f' = \lambda \mathrm{id}_V$. ■

1.6. Los problemas fundamentales en la teoría de representaciones

Dado que hemos introducido algunas de las definiciones básicas de la teoría de representaciones, cabe la pena preguntarse qué es lo que estudia la teoría de representaciones (de grupos finitos).

Dado que toda representación es suma directa de representaciones irreducibles, un problema interesante a ser estudiado es el de *determinar todas las representaciones irreducibles de un grupo dado*. Este es un problema no trivial, en el que hemos obtenido respuestas para ciertas familias de grupos finitos y respuestas parciales en otros casos. Un ejemplo de una familia de grupos en los que conocemos todas sus representaciones irreducibles son los *grupos simétricos* S_n, para los cuales la familia de representaciones irreducibles está dada por los *módulos de Specht*.

Otro problema muy importante en la teoría de representaciones es determinar fórmulas para las dimensiones de las representaciones irreducibles. Este problema puede llegar a ser incluso más complicado que el de determinar las representaciones irreducibles en sí (existen representaciones para las cuales el problema de determinar una base explícita es altamente no trivial).

Dada una representación, el descomponerla en suma directa de representaciones irreducibles es un problema altamente no trivial. Por ejemplo, para los grupos simétricos, pese a que conocemos las representaciones irreducibles de estos, aún es un problema abierto el determinar la descomposición en suma directa de representaciones irreducibles del producto tensorial de representaciones irreducibles del mismo. Entonces, otro de los problemas fundamentales es el de desarrollar técnicas que nos permitan determinar la descomposición en representaciones irreducibles de una representación dada.

Terminamos con un último problema que es el *problema pletístico*: Como se mencionó anteriormente, dada una representación V, el determinar las descomposiciones en sumas directas de representaciones irreducibles de $V^{\otimes n}$, $S^n(V)$, $\bigwedge^n(n)$, o combinaciones de estas construcciones: $V^{\otimes n} \otimes S^m(V) \otimes \bigwedge^p(V)$ es un problema fundamental también. Este problema es usualmente conocido como el *problema de Clebsch-Gordon*.

La siguiente sección nos otorgará una de las herramientas más potentes que existen para el estudio de la teoría de representaciones y para afrontar (al menos parcialmente o como un primer abordaje) algunos de los problemas fundamentales recientemente expuestos: la teoría de caracteres.