Lección nº 2 EPN, Octubre 2020

2. Teoría de Caracteres

Por simplicidad, en lo que sigue asumiremos que $k = \mathbb{C}$, de modo que en particular $\mathbb{C}[G]$ es semisimple, es decir, todas las representaciones de un grupo finito son completamente reducibles y además una representación es irreducible si y sólo si es indescomponible. Además todas las representaciones consideradas serán de *dimensión finita*.

2.1. Definiciones y propiedades básicas

Antes de definir lo que es el carácter de una representación, recordemos un poco de álgebra lineal: Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita y $T : V \to V$ un operador lineal. Dada cualquier base (ordenada) $\mathcal{B}$ de V, podemos definir la matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ asociada a esta base. Notemos que si $\mathcal{B}'$ es otra base, y si P denota la matriz de cambio de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$, entonces

$$[T]_{\mathcal{B}'} = P[T]_{\mathcal{B}}P^{-1},$$

de modo que

$$\mathrm{Tr}([T]_{\mathcal{B}'}) = \mathrm{Tr}(P[T]_{\mathcal{B}}P^{-1}) = \mathrm{Tr}(P^{-1}P[T]_{\mathcal{B}}) = \mathrm{Tr}([T]_{\mathcal{B}}).$$

En particular, el número complejo

$$\mathrm{Tr}(T) := \mathrm{Tr}([T]_{\mathcal{B}})$$

es independiente de la elección de la base $\mathcal{B}$. Este número se llama la *traza* de T.

Como el cuerpo de escalares es algebraicamente cerrado, existe una base $\mathcal{B}$ de V en la cual T se representa por una matriz de Jordan

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1,n_1} & & & \\ & J_{\lambda_2,n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\lambda_r,n_r} \end{pmatrix}$$

donde $J_{\lambda,n}$ es la matriz $n \times n$ dada por

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

y $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ son los (no necesariamente distintos) valores propios de T. De este modo, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ son todos los valores propios de T (contando multiplicidades) tenemos que

$$\mathrm{Tr}(T) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j.$$

Ejercicio 2.1. Sean $S, T : V \to V$ operadores lineales, donde V es un espacio vectorial complejo de dimensión finita. Muestre que

(a) Si $S \in \mathrm{GL}(V)$ entonces $\mathrm{Tr}(STS^{-1}) = \mathrm{Tr}(T)$. En particular, la función $\mathrm{Tr} : \mathrm{GL}(V) \to \mathbb{C}$ es una función de clases.

(b) $\mathrm{Tr}(\mathrm{id}_V) = \dim(V)$

(c) Si $T^n = \mathrm{id}_V$ para algún entero no negativo n, entonces $\mathrm{Tr}(T)$ es una suma de raíces n-ésimas de la unidad.

Definición. Sea G un grupo finito y V una representación de G. El *carácter* de V es la función $\chi_V : G \to \mathbb{C}$ definida por

$$\chi_V(g) = \mathrm{Tr}_V(g) = \mathrm{Tr}(g\mid_V).$$

Lema 2.2. *Si V y W son representaciones de G tales que $V \cong W$, entonces $\chi_V = \chi_W$.*

Demostración. Sea $f : V \to W$ un isomorfismo de representaciones y $g \in G$. Si λ es un valor propio de $g\mid_V$ asociado a un vector propio v, sea $w = f(v)$. Tenemos que

$$gw = gf(v) = f(gv) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda w,$$

por ende λ también es un valor propio de $g\mid_W$ asociado al vector propio w. De este modo, todo valor propio de $g\mid_V$ es un valor propio de $g\mid_W$. Invirtiendo los roles de V y W concluimos que $g\mid_V$ y $g\mid_W$ tienen los mismos valores propios, y por lo tanto tienen la misma traza, es decir

$$\chi_V(g) = \mathrm{Tr}(g\mid_V) = \mathrm{Tr}(g\mid_W) = \chi_W(g).$$

Como g es arbitrario, se concluye que $\chi_V = \chi_W$. ∎

Observación. Más adelante probaremos un resultado aún más fuerte: Dos representaciones son isomorfas si y sólo si sus caracteres son iguales. Sin embargo el recíproco de este resultado deberá esperar a que dispongamos de un mayor número de herramientas.

Proposición 2.3. *Sea V una representación de G. Entonces*

(i) $\chi_V(1) = \dim(V)$.

(ii) *χ_V es una función de clases. Esto es, $\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g)$ para todo $g, h \in G$.*

(iii) *Para todo $g \in G$, se tiene que $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$.*

Demostración. (i) y (ii) son triviales. Para probar (iii) notemos que si $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ son los valores propios de $g\mid_V$ (no necesariamente distintos), entonces $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_r^{-1}$ son los valores propios de $g^{-1}\mid_V$. Pero como $g^n = 1$ para $n = |G|$, entonces $\lambda_j^n = 1$, lo que implica que $|\lambda_j| = 1$ y por ende $\lambda_j^{-1} = \overline{\lambda_j}$ para todo $j \in \{1, \dots, r\}$, lo que implica que

$$\chi_V(g^{-1}) = \sum_{j=1}^{r} \overline{\lambda_j} = \overline{\sum_{j=1}^{r} \lambda_j} = \overline{\chi_V(g)}.$$

∎

Lema 2.4. *Sea V una representación de G. Entonces existe una base de V tal que $g|_V$ está representado en dicha base por una matriz unitaria. En particular, $g|_V$ es diagonalizable.*

Demostración. Fijemos un producto interno $(\cdot,\cdot)$ sobre V que sea G-invariante, es decir, tal que

$$(gv, gw) = (v, w), \qquad \text{para todo } g \in G, v, w \in V.$$

Un tal producto interno existe (Ver Ejercicio 1.28 (a) y (b)). Sea $\mathcal{B}$ una base ortonormal de V para dicho producto interno y sea $A = [g|_V]_{\mathcal{B}}$. Entonces tenemos que, para todo $x, y \in \mathbb{C}^n$, con $n = \dim(V)$,

$$x^* A^* A y = (Ax)^*(Ay) = (gv, gw) = (v, w) = x^* y$$

donde $[v]_{\mathcal{B}} = x$ y $[w]_{\mathcal{B}} = y$. De este modo $A^*A = I$ y consecuentemente $AA^* = I$, lo que implica que A es unitaria.

En particular, como A es unitaria, entonces es normal, y por lo tanto $g|_V$ es un operador normal. Por el teorema espectral para operadores normales se sigue que $g|_V$ es (unitariamente) diagonalizable. ■

Proposición 2.5. *Sean V, W dos representaciones de G. Entonces*

(i) $\chi_{V\oplus W} = \chi_V + \chi_W$.

(ii) $\chi_{V\otimes W} = \chi_V \chi_W$.

(iii) $\chi_{S^2(V)}(g) = \frac{1}{2}[\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2)]$ *para todo* $g \in G$.

(iv) $\chi_{\bigwedge^2(V)}(g) = \frac{1}{2}[\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)]$ *para todo* $g \in G$.

(v) $\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$.

(vi) $\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)} = \overline{\chi_V}\chi_W$.

Demostración. Eligiendo bases para V y W, podemos representar a $g|_V$ y $g|_W$ por matrices A y B, de modo que la matriz de $g|_{V\oplus W}$ está dada por

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

y por ende

$$\chi_{V\oplus W}(g) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(g|_V) + \mathrm{Tr}(g|_W) = \chi_V(g) + \chi_W(g),$$

lo que prueba (i).

Para probar (ii), notemos que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de $g|_V$ (contando multiplicidades) y $\mu_1, \ldots \mu_m$ son los valores propios de $g|_W$, entonces, por el lema anterior, $(\lambda_i\mu_j)_{1\le i\le n, 1\le j\le m}$ son los valores propios de $g|_{V\otimes W}$ (contando multiplicidades), de modo que

$$\chi_{V\otimes W}(g) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \lambda_i\mu_j = \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m}\mu_j\right) = \chi_V(g)\chi_W(g),$$

lo que prueba (ii).

Para probar (iii), sea $e_1, \ldots, e_n$ una base formada por vectores propios de $g\,|_V$ (una tal base existe, pues $g\,|_V$ es diagonalizable) y sea λ_j el valor propio asociado a e_j $(1 \leq j \leq n)$. La familia de vectores $e_i e_j$ con $1 \leq i \leq j \leq n$ forma una base para $S^2(V)$ y $e_i e_j$ es un vector propio de $g\,|_{S^2(V)}$ asociado a $\lambda_i \lambda_j$. Entonces tenemos que

$$\chi_{S^2(V)}(g) = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} \lambda_i\lambda_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} \lambda_i\lambda_j = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\right)^2 + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2\right] = \frac{1}{2}[\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2)].$$

Para probar (iv) podemos proceder de manera análoga a (iii) o usar el siguiente argumento: Sabemos que $V \otimes V \cong S^2(V) \oplus \bigwedge^2(V)$ (Ver el Ejercicio 1.20(b)) y por el Lema 2.2 y la parte (i) tenemos que

$$\chi_V^2 = \chi_{V\otimes V} = \chi_{S^2(V)\oplus\bigwedge^2(V)} = \chi_{S^2(V)} + \chi_{\bigwedge^2(V)},$$

de modo que

$$\chi_{\bigwedge^2(V)}(g) = \chi_V(g)^2 - \frac{1}{2}[\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2)] = \frac{1}{2}[\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)].$$

Ahora, notemos que

$$\chi_{V^*}(g) = \mathrm{Tr}(g\,|_{V^*}) = \mathrm{Tr}({}^t(g^{-1}\,|_V)) = \mathrm{Tr}(g^{-1}\,|_V) = \chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)},$$

y esto demuestra (v).

Finalmente, por el isomorfismo de representaciones $\mathrm{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$, (vi) es consecuencia de (ii) y (v). ∎

2.2. Caracteres virtuales y representaciones virtuales

Observación. Sea $\mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G)$ el conjunto de todas las funciones de clase $G \to \mathbb{C}$. Este es claramente un anillo conmutativo unitario con la suma y multiplicación punto a punto. Por la proposición anterior, tenemos que la suma y el producto de caracteres también son caracteres, por lo tanto el conjunto $R^+(G)$ formado por todos los caracteres de G forma un sub-semianillo de $\mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G)$. El motivo por el que $R^+(G)$ es un semianillo y no un anillo, es que en general si χ es un carácter, no necesariamente $-\chi$ lo es. De hecho, si V es una representación, con $\dim(V) \neq 0$, entonces

$$\chi_V(1) = \dim(V) \qquad \text{y} \qquad -\chi_V(1) = -\dim(V),$$

pero si $-\chi_V = \chi_W$ para alguna representación, deberíamos tener

$$-\dim(V) = -\chi_V(1) = \chi_W(1) = \dim(W),$$

lo que es absurdo.

Definición. Un *carácter virtual* de un grupo G es una combinación lineal con coeficientes enteros de caracteres de G. El conjunto formado por los caracteres virtuales de G lo denotaremos por $R(G)$. Este es claramente un subanillo de $\mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G)$ y es igual al subanillo de $\mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G)$ generado por $R^+(G)$.

De manera más general, si A es un anillo conmutativo con unidad, definimos

$$R_A(G) = A \otimes_{\mathbb{Z}} R(G).$$

Antes de continuar, haremos una breve introducción al grupo de Grothendieck. Nos enfocaremos solamente en la categoría $\mathbf{Rep}^0(G)$, pero esta construcción puede ser fácilmente generalizada a cualquier categoría abeliana.

La relación de "ser isomorfos" es una relación de equivalencia en la clase de todas las representaciones de dimensión finita de un grupo G. Denotamos por $[V]$ a la clase de equivalencia de una representación bajo esta relación de equivalencia. Dicho de otro modo, una representación W pertenece a $[V]$ si y sólo si V es isomorfa a W. Sea $F(G)$ el $\mathbb{Z}$-módulo libre (i.e. grupo abeliano libre) generado por la colección $\{[V] \mid V \text{es una representación de } G\}$. Sea $F'(G)$ el submódulo de $F(G)$ generado por los elementos de la forma

$$[U] - [V] + [W]$$

tales que existe una sucesión exacta (con morfismos de representaciones) corta

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow V \longrightarrow W \longrightarrow 0.$$

Equivalentemente, $F'(G)$ es el submódulo generado por los elementos de la forma

$$[V] - [V \oplus W] + [W]$$

donde V y W son representaciones de G.

Ejercicio 2.6. Muestre que ambas descripciones de $F'(G)$ son equivalentes. Es decir, pruebe que una sucesión de representaciones y morfismos de representaciones

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow V \longrightarrow W \longrightarrow 0.$$

es exacta si y sólo si existe un diagrama conmutativo de representaciones con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d, equal] & V \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r] & U \oplus W \arrow[r] & W \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

donde el morfismo $U \to U \oplus W$ es un isomorfismo (es decir, si y sólo si la sucesión exacta larga anterior es escindida).

Definición. El *grupo de Grothendieck* de la categoría $\mathbf{Rep}^0(G)$ es el grupo $K(G)$ definido por

$$K(G) = F(G)/F'(G).$$

Por un abuso de notación, seguiremos escribiendo $[V]$ para denotar a un elemento de $K(G)$. Entonces, en $K(G)$ se tiene la relación

$$[V \oplus W] = [V] + [W].$$

Ahora equiparemos a $K(G)$ con la estructura de un anillo conmutativo unitario: Si $[V], [W] \in K(G)$, definimos

$$[V][W] = [V \otimes W].$$

Este producto está bien definido:

Ejercicio 2.7. Pruebe que si $V \cong V'$ y $W \cong W'$, entonces $V \otimes W \cong V' \otimes W'$. Pruebe además que para toda representación V, se tiene que

$$\mathbf{1} \otimes V \cong V \cong V \otimes \mathbf{1},$$

donde $\mathbf{1}$ es la representación trivial de G.

De este modo, el Ejercicio anterior muestra que $[\mathbf{1}]$ es un elemento neutro para el producto de $K(G)$. Más aún, con esto obtenemos la estructura de un anillo conmutativo:

Ejercicio 2.8. Sean U, V, W representaciones de G. Demuestre que

(a) $W \otimes V \cong V \otimes W$;

(b) $U \otimes (V \oplus W) \cong (U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$.

(c) Concluya que $[U]([V] + [W]) = [U][V] + [U][W]$ y por ende que $K(G)$ es un anillo.

Elijamos un representante de cada clase de equivalencia de las representaciones irreducibles. Es decir, sea $\{W_i \mid i \in I\}$ una colección de representaciones irreducibles de G tal que si V es cualquier representación irreducible de G, entonces $V \cong W_i$ para algún $i \in I$ y tal que $W_i \ncong W_j$ si $i \neq j$. De este modo todo elemento de $K(G)$ puede escribirse en la forma

$$n_1[W_{i_1}] + \cdots + n_m[W_{i_m}]$$

para ciertos $i_1, \ldots, i_m \in I$ y ciertos $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{Z}$. Por este motivo, sin riesgo de ambigüedad, escribiremos

$$n_1 W_{i_1} + \cdots + n_m W_{i_m}$$

para los elementos de $K(G)$.

Definición. Los elementos $n_1 W_{i_1} + \cdots + n_m W_{i_m}$ de $K(G)$ se llaman *representaciones virtuales* de G.

Notemos que la función $[V] \mapsto \chi_V$ se extiende a una única función $K(G) \to R(G)$. Es claro que este es un homomorfismo de anillos y que además es sobreyectivo. El trabajo que realizaremos en las secciones siguientes probará que este homomorfismo es inyectivo, y por ende que los anillos $K(G)$ y $R(G)$ son isomorfos.

Esta discusión permite hacer uso de la teoría de anillos para el estudio de las representaciones de grupos finitos, y por ende de la teoría grupos. Cabe recalcar que existen teoremas de la teoría de grupos que dependen fuertemente de la teoría de caracteres. Por citar dos ejemplos:

- El *teorema de Feit-Thompson* (1963) que establece que *todo grupo finito de orden impar es soluble.* Este teorema utiliza de manera esencial la teoría de caracteres. De hecho el libro *Character Theory for the odd order theorem* de Peterfalvi (2000) desarrolla toda la parte de teoría de caracteres necesaria para la demostración del teorema de Feit-Thompson. Cabe destacar que el artículo original de Feit y Thompson donde demuestran el teorema tiene nada más y nada menos que ¡255 páginas!

- El *teorema de Frobenius* (1901) dice que *el núcleo de Frobenius de un grupo de Frobenius es un subgrupo normal.* Hasta la fecha no se conoce una demostración de este teorema que no haga uso de la teoría de caracteres. La aproximación más cercana a una demostración del teorema que no hace uso de la teoría de caracteres es debida a Terence Tao (2013) (¡112 años después!), que hace una demostración de este teorema usando Análisis de Fourier y debilitando (pero no eliminando completamente) la dependencia en la teoría de caracteres.

2.3. Relaciones de ortogonalidad de caracteres

El conjunto $\mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G)$ es un anillo y además es un espacio vectorial complejo (de hecho es una $\mathbb{C}$-álgebra). Definimos en $\mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G)$ un producto interno como sigue:

$$(\chi \mid \psi) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\overline{\psi(g)}, \qquad \chi, \psi \in \mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G).$$

Notemos que si $\psi \in R^+(G)$, entonces $\overline{\psi(g)} = \psi(g^{-1})$ y por lo tanto podemos escribir

$$(\chi \mid \psi) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\psi(g^{-1}), \qquad \chi \in \mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G), \psi \in R^+(G).$$

Definición. Sea $\chi = \chi_V$ el carácter de una representación V. Diremos que χ es un *carácter* irreducible si V es una representación irreducible.

Nuestro objetivo en esta subsección y la siguiente será probar que la colección de todos los caracteres irreducibles constituye una base ortonormal para el espacio vectorial $\mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G)$.

Si V es una representación de G, definimos

$$V^G = \{v \in V \mid gv = v, \text{ para todo } g \in G\}.$$

V^G se llama el *subespacio estable* de V por G. Notemos que V^G es una subrepresentación de V: Si $v \in V^G$ entonces $gv = v \in V^G$ para todo $g \in G$, de donde $g(V^G) \subseteq V^G$. Más aún, si $m = \dim(V^G)$, sea $e_1, \ldots, e_m$ una base de V^G, además $\mathbb{C}e_j$ es una subrepresentación de V^G para cada j y

$$V^G = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathbb{C}e_j,$$

por lo que V^G es irreducible si y sólo si $\dim(V^G) = 1$ y esto a su vez equivale a que V^G es la representación trivial. En particular, si V es una representación irreducible distinta de la representación trivial, entonces $V^G = 0$.

Ahora, si V, W son dos representaciones de G, consideramos la representación $\mathrm{Hom}(V, W)$. Recordemos que habíamos denotado por $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ al espacio vectorial de morfismos de representaciones $V \to W$. Si $f \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$, entonces para todo $g \in G$ tenemos que

$$(gf)(v) = gf(g^{-1}v) = gg^{-1}f(v) = f(v), \qquad v \in V,$$

de modo que $gf = f$ para todo $g \in G$. Esto significa que $\mathrm{Hom}_G(V, W) \subseteq \mathrm{Hom}(V, W)^G$. Recíprocamente, tenemos que si $f \in \mathrm{Hom}(V, W)^G$, entonces para todo $g \in G$,

$$f(gv) = gg^{-1}f(gv) = g(g^{-1}f(v)) = gf(v), \qquad v \in V,$$

por lo que $f \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$ y así

$$\mathrm{Hom}_G(V, W) = \mathrm{Hom}(V, W)^G. \tag{1}$$

Proposición 2.9 (La primera fórmula de proyección)**.** *La aplicación lineal $\varphi : V \to V$ definida por*

$$\varphi = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g \mid_V$$

es un morfismo de representaciones y además es una proyección de V sobre V^G. Más aún, tenemos que

$$\dim(V^G) = \operatorname{Tr}(\varphi) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g)$$

Demostración. La demostración de esta proposición consiste en simplemente verificar lo que esta dice (no hay trampas): Sea $h \in G$ y $v \in V$, entonces

$$\varphi(hv) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g(hv) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gv = \varphi(v)$$

y

$$h\varphi(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} h(gv) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gv = \varphi(v),$$

lo que prueba que

$$\varphi(hv) = h\varphi(v) = \varphi(v).$$

Esto prueba que φ es un morfismo de representaciones y también que $\varphi(V) \subseteq V^G$.

Sea ahora $v \in V^G$, entonces $gv = v$ para todo $g \in G$, de modo que

$$\varphi(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gv = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} v = v,$$

y así $v \in \varphi(V)$, por lo que $\varphi(V) = V^G$.

A continuación, notamos que si $v \in V$, entonces $\varphi(v) \in V^G$, de donde $g\varphi(v) = \varphi(v)$ para todo $g \in G$ y así

$$\varphi^2(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\varphi(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \varphi(v) = \varphi(v),$$

de donde $\varphi^2 = \varphi$ y por ende φ es una proyección.

Finalmente, si $W = \operatorname{Ker}(\varphi)$ tenemos que $V = V^G \oplus W$ y φ admite una representación matricial de la forma

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $m = \dim V^G$, con lo cual $\dim(V^G) = \operatorname{Tr}(\varphi)$ y con esto

$$\dim(V^G) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \operatorname{Tr}(g\mid_V) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g).$$

∎

Teorema 2.10 (Relaciones de ortogonalidad de caracteres)**.** *Los caracteres irreducibles de un grupo G constituyen una familia ortonormal en el espacio vectorial* $\mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G)$*. Más específicamente:*

(i) *Si χ es un carácter irreducible, entonces $(\chi \mid \chi) = 1$.*

(ii) *Si χ y ψ son caracteres irreducibles asociados a representaciones que no son isomorfas, entonces $(\chi \mid \psi) = 0$.*

Demostración. Esta será nuestra primera aplicación del lema de Schur.

Sean V y W dos representaciones irreducibles. Notemos que

$$\dim \operatorname{Hom}_G(V,W) = \begin{cases} 1 & \text{si } V \cong W \\ 0 & \text{si } V \not\cong W. \end{cases} \tag{2}$$

En efecto, si $V \not\cong W$, como V y W son irreducibles, el lema de Schur implica que $\operatorname{Hom}_G(V,W) = 0$. Si en cambio $V \cong W$, sea $f : V \to W$ un isomorfismo y sea $h \in \operatorname{Hom}_G(V,W)$, entonces $f^{-1} \circ h : V \to V$ es un elemento de $\operatorname{Hom}_G(V,V)$. Por el lema de Schur, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $f^{-1} \circ h = \lambda \mathrm{id}_V$, de donde $h = \lambda f$ y así $\operatorname{Hom}_G(V,W) = \mathbb{C}f$, de donde $\dim(\operatorname{Hom}_G(V,W)) = 1$.

Con esto, por la primera fórmula de proyección, tenemos que

$$\begin{aligned} \overline{(\chi_V \mid \chi_W)} &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_V(g)} \chi_W(g) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\operatorname{Hom}(V,W)}(g) \\ &= \dim \operatorname{Hom}(V,W)^G \end{aligned}$$

Entonces por (2) tenemos que

$$(\chi_V \mid \chi_W) = \begin{cases} 1 & \text{si } V \cong W \\ 0 & \text{si } V \not\cong W. \end{cases}$$

Que es lo que deseábamos probar. ■

Ejercicio 2.11. Generalice la fórmula (2): Si V es irreducible y W es arbitraria, pruebe que $\dim \operatorname{Hom}(V,W)$ es la multiplicidad de V en W. Similarmente pruebe que si V es arbitraria y W es irreducible, entonces $\dim \operatorname{Hom}(V,W)$ es la multiplicidad de W en V. *Ayuda: Obviamente debe usar el lema de Schur, ¡no lo piense dos veces!*

Corolario 2.12. *El número de representaciones irreducibles (módulo isomorfismo) de G es menor o igual al número de clases de conjugación en G. En particular, existe un número finito de representaciones irreducibles de un grupo finito.*

Demostración. El número de representaciones irreducibles es igual al número de caracteres irreducibles. Por la proposición anterior, los caracteres irreducibles son linealmente independientes en $\mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G)$ y este espacio es de dimensión finita: Si $C_1, \ldots, C_r$ es la colección de todas las clases de conjugación en G, las funciones u_j que toman el valor 1 sobre C_j y 0 fuera de esta clase forman una base para este espacio. De este modo $\dim \mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G) = r$ y por ende a lo más pueden haber r caracteres irreducibles. ■

Corolario 2.13. *Sea V una representación irreducible y W una representación cualquiera. Entonces $(\chi_V \mid \chi_W)$ es igual a la multiplicidad de V en W. En particular, la multiplicidad de V en W no depende de la descomposición de W en subrepresentaciones irreducibles.*

Demostración. Escribamos $W = V_1^{\oplus n_1} \oplus \cdots \oplus V_m^{\oplus n_m}$, con $V_1 \cong V$ y $V_j \not\cong V$ para $2 \leq j \leq m$, de este modo la multiplicidad de V en W es n_1 (para esta descomposición). Luego, tenemos que

$$\chi_W = n_1 \chi_V + n_2 \chi_{V_2} + \cdots + n_m \chi_{V_m}$$

y así
$$(\chi_V \mid \chi_W) = n_1(\chi_V \mid \chi_V) + n_2(\chi_V \mid \chi_{V_2}) + \cdots n_m(\chi_V \mid \chi_{V_m}) = n_1.$$
Además, $(\chi_V \mid \chi_W)$ no depende de la descomposición escogida para W. ■

Corolario 2.14. *Una representación χ_V es irreducible si y sólo si $(\chi_V \mid \chi_V) = 1$.*

Demostración. Una dirección ya es conocida. Supongamos que $(\chi_V \mid \chi_V) = 1$. Escribamos $V = n_1V_1 + \oplus + n_mV_m$ con V_i irreducible de multiplicidad m_i en V. Entonces
$$1 = (\chi_V \mid \chi_V) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} n_i n_j (\chi_{V_i} \mid \chi_{V_j}) = \sum_{i=1}^{m} n_i^2,$$
pero n_i^2 son enteros positivos cuya suma es 1, lo que es posible solamente si $n_i = 1$ y $n_j = 0$ para cierto i y para todo $j \neq i$. De este modo $V \cong V_i$ es irreducible. ■

Teorema 2.15. *Dos representaciones V y W son isomorfas si y sólo si $\chi_V = \chi_W$.*

Demostración. Ya sabemos que si dos representaciones son isomorfas, entonces sus caracteres son iguales (Ver Lema 2.2). Recíprocamente, supongamos que $\chi_V = \chi_W$. Sea V_i una representación irreducible que ocurre con multiplicidad n_i en V. Entonces el Corolario 2.13 nos dice que $n_i = (\chi_V \mid \chi_{V_i}) = (\chi_W \mid \chi_{V_i})$, de modo que V_i tiene también multiplicidad n_i en W. De este modo
$$V \cong n_1V_1 \oplus \cdots \oplus n_mV_m \cong W.$$
■

Corolario 2.16. *El homomorfismo de anillos $K(G) \to R(G)$ es inyectivo, y por ende un isomorfismo.*

Demostración. Sea $\sum a_i[V_i]$ un elemento en el núcleo de este homomorfismo, con $a_i \in \mathbb{Z}$ y V_i representaciones irreducibles dos a dos no isomorfas de G. Esto significa que $\sum a_i\chi_{V_i} = 0$ y como los caracteres χ_{V_i} son linealmente independientes, se sigue que $a_i = 0$, es decir, $\sum a_i[V_i] = 0$. ■

2.4. Teorema fundamental de la teoría de caracteres

Hasta este punto hemos probado que los caracteres irreducibles constituyen un conjunto ortonormal en $\mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G)$ y que además el número de tales caracteres es a lo más el número de clases de conjugación en G. En esta subsección vamos a refinar considerablemente estos resultados. Para hacer esto, daremos una mirada más cercana a la representación regular $R = \mathbb{C}[G]$ de G. Denotaremos por r_G al carácter de la representación regular.

Sabemos que $\dim R = |G|$ y de este modo $r_G(1) = |G|$. Si $g \neq 1$, la matriz de $g\mid_R$ en la base G tiene 0's en la diagonal, pues $gh \neq h$ para todo $h \in G$ y por ende $r_G(g) = 0$. De este modo
$$r_G(g) = \begin{cases} |G| & \text{si } g = 1, \\ 0 & \text{si } g \neq 1. \end{cases} \tag{3}$$

Ejercicio 2.17. Generalice la ecuación (3) del siguiente modo: Sea X un conjunto sobre el cual G actúa y sea V la representación de permutación asociada a esta acción. Muestre que $\chi_V(g)$ es el número de elementos $x \in X$ tales que $gx = x$. Deduzca la fórmula (3) a partir de este resultado.

Sean $W_1, \ldots, W_m$ todas las distintas representaciones irreducibles de G. Escribamos $n_i = \dim(W_i) = \chi_{W_i}(1)$. Sabemos que $(\chi_{W_i} \mid r_G)$ es la multiplicidad de W_i en R y además

$$(\chi_{W_i} \mid r_G) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{W_i}(g)\overline{r_G(g)} = \frac{1}{|G|}\chi_{W_i}(1)\overline{r_G(1)} = \frac{n_i|G|}{|G|} = n_i.$$

De este modo hemos probado:

Proposición 2.18. *Cada representación irreducible W_i de G ocurre en la representación regular $\mathbb{C}[G]$ con multiplicidad igual a su dimensión. Es decir*

$$\mathbb{C}[G] \cong W_1^{\oplus \dim(W_1)} \oplus \cdots \oplus W_m^{\oplus \dim(W_m)}.$$

Corolario 2.19. *Sea $n_i = \dim(W_i)$, entonces*

$$\sum_{i=1}^m n_i^2 = |G|.$$

Si $g \in G$ con $g \neq 1$, entonces

$$\sum_{i=1}^m n_i\chi_{W_i}(g) = 0.$$

Demostración. Tenemos que

$$|G| = \dim(\mathbb{C}[G]) = \dim(W_1^{\oplus n_1} \oplus \cdots \oplus W_m^{\oplus n_m}) = n_1\dim(W_1) + \cdots + n_m\dim(W_m) = \sum_{i=1}^m n_i^2.$$

Si $g \neq 1$ es un elemento de G, tenemos que

$$0 = r_G(g) = \sum_{i=1}^m n_i\chi_{W_i}(g).$$

Esto completa la demostración. ■

Lema 2.20. *Sea $\alpha : G \to \mathbb{C}$ una función (no necesariamente una función de clases) y V una representación de G. Definimos la aplicación lineal $\varphi_{\alpha,V} : V \to V$ mediante*

$$\varphi_{\alpha,V} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\alpha(g)g\mid_V .$$

Entonces

(i) *$\varphi_{\alpha,V}$ es un morfismo de representaciones para toda representación V si y sólo si $\alpha \in \mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G)$.*

(ii) *Si $\alpha \in \mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G)$ y V es irreducible de dimensión n, entonces*

$$\varphi_{\alpha,V} = \frac{1}{n}(f \mid \overline{\chi_V})\mathrm{id}_V.$$

Demostración. Supongamos primero que $\alpha \in \mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G)$, es decir, $\alpha(hgh^{-1}) = \alpha(g)$ para todo $g, h \in G$, y sea V una representación de G. Entonces, si $h \in G$ y $v \in V$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\varphi_{\alpha,V}(hv) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) g(hv) \\
&= h \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g)(h^{-1}gh)v \right) \\
&= h \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(hgh^{-1}) gv \right) \\
&= h \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) gv \right) \\
&= h\varphi_{\alpha,V}(v),
\end{aligned}$$

y por ende $\varphi_{\alpha,V}$ es un morfismo de representaciones. Recíprocamente, supongamos que $\varphi_{\alpha,V}$ es morfismo de representaciones para toda representación V de G. Tomemos $V = R = \mathbb{C}[G]$. Si $h, h' \in G \subseteq R$, entonces

$$\varphi_{\alpha,R}(hh') = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) ghh' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g(hh')^{-1}) g$$

y

$$h\varphi_{\alpha,R}(h') = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) hgh' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(h^{-1}g(h')^{-1}) g.$$

Como $\varphi_{\alpha,R}(hh') = h\varphi_{\alpha,R}(h')$ y G es linealmente idependiente en R, entonces

$$\alpha(g(hh')^{-1}) = \alpha(h^{-1}g(h')^{-1}), \qquad \text{para todo } g, h, h' \in G.$$

Tomando $h' = h^{-1}$ obtenemos $\alpha(h^{-1}gh) = \alpha(g)$ para todo $g, h \in G$, lo que significa que $\alpha \in \mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G)$. Esto prueba (i).

Ahora para probar (ii) supongamos que $\alpha \in \mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G)$. Por la parte (i) tenemos que $\varphi_{\alpha,V}$ es un morfismo de representaciones, y si asumimos que V es irreducible, el lema de Schur implica que $\varphi_{\alpha,V} = \lambda \mathrm{id}_V$ para cierto $\lambda \in \mathbb{C}$. Sea $n = \dim(V)$, entonces

$$\begin{aligned}
n\lambda &= \mathrm{Tr}(\lambda \mathrm{id}_V) \\
&= \mathrm{Tr}(\varphi_{\alpha,V}) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \mathrm{Tr}(g \mid V) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \chi_V(g) \\
&= (\alpha \mid \overline{\chi_V}),
\end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado. ■

Teorema 2.21 (Teorema fundamental de la teoría de caracteres)**.** *Los caracteres irreducibles forman una base ortonormal de* $\mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G)$*.*

Demostración. Por las relaciones de ortogonalidad de los caracteres, sabemos que los caracteres irreducibles son una familia ortonormal en $\mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G)$. Lo que hace falta es probar que estos generan a $\mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G)$. Sabemos que esto es equivalente a probar que si $(\alpha \mid \chi_W) = 0$ para todo $\alpha \in \mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G)$ y toda representación irreducible W de G, entonces $\alpha = 0$.

Sea $\alpha \in \mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G)$ y tal que $(\alpha \mid \chi_{W_i}) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Sea $R = \mathbb{C}[G]$ la representación regular de G, y consideremos el homomorfismo $\varphi_{\overline{\alpha},\chi_{W_i}}$ como en el lema anterior. Entonces como W_i es irreducible,

$$\varphi_{\overline{\alpha},\chi_{W_i}} = \frac{|G|}{\dim(W_i)}(\overline{\alpha} \mid \overline{\chi_{W_i}}) = \frac{1}{\dim(W_i)}\overline{(\alpha \mid \chi_{W_i})} = 0.$$

Ahora, consideremos el operador $\varphi_{\overline{\alpha},R}$. Si $v \in R$, escribimos $v = w_1 + \cdots + w_m$ con $w_i \in W_i^{\oplus n_i}$ y $n_i = \dim(W_i)$. Similarmente, escribimos $w_i = w_{i1} + \cdots + w_{i,n_i}$ con $w_{ij} \in W_i$. Con esto, tenemos que

$$\varphi_{\overline{\alpha},R}(w_{ij}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\alpha(g)g(w_{ij}) = \varphi_{\overline{\alpha},\chi_{W_i}}(w_{ij}) = 0,$$

de modo que $\varphi_{\overline{\alpha},R}(v) = 0$ para todo $v \in R$, es decir, $\varphi_{\overline{\alpha},R} = 0$. Pero entonces tenemos que $\sum_{g\in G}\alpha(g)g = 0$ y como G es una base de R, esto implica que $\alpha(g) = 0$ para todo $g \in G$, es decir, $\alpha = 0$. ■

Corolario 2.22. *El número de representaciones irreducibles de un grupo finito G es igual al número de clases de conjugación de G.*

Demostración. Ya hemos visto que la dimensión de $\mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G)$ es igual al número de clases de conjugación de G. El número de representaciones irreducibles es igual al número de caracteres irreducibles. Dado que estos últimos forman una base ortonormal de $\mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G)$, se sigue que el número de representaciones irreducibles es igual a la dimensión de $\mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G)$, que es precisamente el número de clases de conjugación de G. ■

2.5. Descomposición isotípica de una representación

Definición. Sea V una representación de G. Diremos que V es *isotípica* si existe una representación irreducible W tal que toda subrepresentación irreducible de V es isomorfa a W.

Dos representaciones V y W de G se dicen *disjuntas* si ninguna subrepresentación de V es isomorfa a alguna subrepresentación de W. Equivalentemente, $\mathrm{Hom}_G(V, W) = 0$.

Ejercicio 2.23. Pruebe que las dos definiciones dada de representaciones disjuntas son equivalentes, es decir: Si V y W son representaciones de G, entonces V y W no tienen subrepresentaciones isomorfas si y sólo si $\mathrm{Hom}_G(V, W) = 0$. *Ayuda: De nuevo, use el lema de Schur.*

Sea V una representación cualquiera. Escribamos

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_p$$

donde $U_1, \ldots, U_p$ son subrepresentaciones irreducibles de V. Sean $W_1, \ldots, W_r$ las representaciones irreducibles de G y definimos

$$V_i = \bigoplus_{U_j \cong W_i} U_j.$$

Dado que toda subrepresentación U_j es isomorfa a alguna de las W_i, se tiene que

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r.$$

Note que es posible que $V_i = 0$ para algún i. Es inmediato de esto que las representaciones V_i son isotípicas.

En general, la descomposición de una representación en suma directa de subrepresentaciones irreducibles no es única:

Ejemplo 2.24. Sea G un grupo cualquiera y sea V la representación dada por $g(v) = v$. Entonces para cualquier base $e_1, \ldots, e_n$ tenemos que

$$V = \bigoplus \mathbb{C}e_n$$

es una descomposición en representaciones irreducibles de V. De este modo, para V hay tantas descomposiciones en subrepresentaciones irreducibles como elecciones de bases para V (salvo el orden).

De este modo, podríamos elegir una nueva descomposición

$$V = U_1' \oplus \cdots \oplus U_p'$$

y definiendo como antes

$$V_i' = \bigoplus_{U_j' \cong W_i} U_j',$$

obtenemos

$$V = V_1' \oplus \cdots \oplus V_r'.$$

Lo (quizá no tan sorprendente) que veremos a continuación es que en efecto $V_i = V_i'$ para todo i, es decir, que la descomposición de V en subrepresentaciones isotípicas dos a dos disjuntas es única.

Definición. La descomposición

$$V = V_1 \oplus \cdots V_r$$

se llama la *descomposición isotípica* de V, y las subrepresentaciones isotípicas V_i se llaman las *componentes isotípicas* de V.

Proposición 2.25. *La aplicación lineal $p_i : V \to V$ definida por*

$$p_i = \frac{\dim(W_i)}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{W_i}(g)} g \mid_V$$

es un morfismo de representaciones y es una proyección de V sobre V_i.

Demostración. Sea U una subrepresentación de V. Notemos que

$$p_i \mid_U = \frac{\dim(W_i)}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{W_i}(g)} g \mid_U = \dim(W_i) \varphi_{\overline{\chi_{W_i}}, U},$$

donde esta última es la aplicación definida en el Lema 2.20. Tomando $U = V$ se tiene que, como $\overline{\chi_{W_i}}$ es una función de clases, entonces p_i es un morfismo de representaciones. Ahora, si U es una representación irreducible, entonces

$$p_i \mid_U = \dim(W_i) \varphi_{\overline{\chi_{W_i}}, U} = \dim(W_i) \frac{1}{\dim(U)} (\overline{\chi_{W_i}} \mid \overline{\chi_U}) \mathrm{id}_U = \frac{\dim(W_i)}{\dim(U)} (\chi_U \mid \chi_{W_i}) \mathrm{id}_U.$$

De este modo, tenemos que para toda subrepresentación irreducible U de V,

$$p_i \mid_U = \begin{cases} \mathrm{id}_U & \text{si } U \cong W_i, \\ 0 & \text{si } U \ncong W_i. \end{cases}$$

De esto es inmediato que $p_i \mid V_i = \mathrm{id}_{V_i}$ y que $p_i \mid V_j = 0$ para todo $j \neq i$. Consecuentemente p_i es la proyección de V sobre V_i, como se deseaba. ■

Corolario 2.26. *La descomposición isotípica de una representación es única.*

Demostración. Basta notar que en la fórmula de la proyección

$$p_i = \frac{\dim(W_i)}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{W_i}(g)} g \mid_V$$

el lado derecho no depende de la descomposición de V en subrepresentaciones irreducibles. ■