Lección nº 3 EPN, Octubre 2020

3. Inducción y restricción de representaciones

Dada una representación $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ de un grupo G en un espacio vectorial V y un subgrupo $H \leq G$ se obtiene fácilmente una representación de H restringiendo ρ a H, esto es $\rho\mid_H : H \to \mathrm{GL}(V)$ es trivialmente una representación de H en V. Esta representación de H será llamada la *restricción* de V a H. Sin embargo, el problema inverso es más delicado: Nos gustaría, dada una representación de H, obtener una representación de G que, en cierto modo, surja naturalmente a partir de la representación de H. El proceso de construir estas representaciones es lo que llamaremos *inducción de representaciones*, y al resultado *representación inducida*.

3.1. Restricción de representaciones

Sea G un grupo finito y $H \leq G$ un subgrupo. Dada una representación $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ de G en V, la restricción $\rho\mid_H : H \to \mathrm{GL}(V)$ es una representación de H en V. La denotaremos por $\mathrm{Res}_H^G(\rho)$. Como es usual en nuestro abuso de lenguaje, si miramos a V como *la* representación, entonces escribiremos $\mathrm{Res}_H^G(V)$ para la restricción de la representación V a H. Si $f : V \to W$ es un morfismo de representaciones de G, entonces $\mathrm{Res}_H^G(f) := f : \mathrm{Res}_H^G(V) \to \mathrm{Res}_H^G(W)$ es también un morfismo de representaciones (¡verifíquelo!) y por ende obtenemos un funtor

$$\mathrm{Res}_H^G : \mathbf{Rep}^0(G) \longrightarrow \mathbf{Rep}^0(H).$$

Cuando no haya riesgo de ambigüedad, escribiremos Res o Res_H en lugar de Res_H^G.

En el contexto de módulos sobre el álgebra de grupo, tenemos una descripción muy limpia del funtor de restricción. En este caso el funtor

$$\mathrm{Res}_H^G : \mathbb{C}[G]\text{-}\mathbf{mod} \longrightarrow \mathbb{C}[H]\text{-}\mathbf{mod}$$

es simplemente el funtor de restricción de escalares: Dado un $\mathbb{C}[G]$-módulo, lo consideramos como un $\mathbb{C}[H]$-módulo restrigiendo los escalares al álgebra $\mathbb{C}[H]$.

Ejercicio 3.1 (Para quienes saben un poco de teoría de categorías)**.** Pruebe que el funtor $\mathrm{Res}_H^G : \mathbf{Rep}^0(G) \to \mathbf{Rep}^0(H)$ (o similarmente que el funtor $\mathrm{Res}_H^G : \mathbb{C}[G]\text{-}\mathbf{mod} \to \mathbb{C}[H]\text{-}\mathbf{mod}$) es un funtor aditivo entre categorías abelianas.

Observación. Si V es una representación irreducible de G, entonces $\mathrm{Res}V$ **no** necesariamente es una representación irreducible de H. Para ilustrar esto, consideremos la representación

$$V = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + z_2 + z_3 = 0\}$$

del grupo simétrico S_3. Tenemos que A_3, el grupo alternante, es un subgrupo (normal) de S_3 (recordemos que en general A_n es el núcleo del morfismo de signatura $S_n \to \{1, -1\}$ que asigna 1 a las permutaciones pares y -1 a las permutaciones impares). En el ejemplo 1.14 vimos que V es una representación irreducible de S_3 de dimensión 2 (note que $\mathrm{char}\,(\mathbb{C}) = 0 \neq 2, 3$). Restrigiendo V a una representación de A_3, veremos que V no es irreducible. Tenemos que

$$A_3 = \{(1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$$

Sean

$$V_1 = \mathbb{C}(1, \omega, \omega^2) \qquad \text{y} \qquad V_2 = \mathbb{C}(1, \omega^2, \omega)$$

donde $\omega = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$. Notemos que

$$(1\ 2\ 3)(1, \omega, \omega^2) = (\omega^2, 1, \omega) = \omega^2(1, \omega, \omega^2),$$

y por ende V_1 es una subrepresentación de V para el grupo A_3. Similarmente lo es V_2. Además, tenemos que $V = V_1 \oplus V_2$ y consecuentemente V no es una representación irreducible de A_3.

Proposición 3.2. *La restricción es transitiva. Es decir, si $K \leq H \leq G$, entonces, para toda representación V de G se tiene que*

$$\mathrm{Res}_K^G V = \mathrm{Res}_K^H \mathrm{Res}_H^G V.$$

Dicho de otro modo, tenemos una composición de funtores

$$\mathrm{Res}_K^G = \mathrm{Res}_K^H \circ \mathrm{Res}_H^G.$$

Demostración. Esto es trivial de las definiciones. ■

Sea V una representación de G y $\chi_V : G \to \mathbb{C}$ su carácter. Recordemos que χ_V es una función de clase, es decir,

$$\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g), \qquad \text{para todo } g, h \in G.$$

En particular, la restricción $\chi_V\ |_H \colon H \to \mathbb{C}$ también es una función de clase sobre H, pues la igualdad anterior sigue siendo válida para todo $g, h \in H$. Más aún, el carácter de $\mathrm{Res}V$ está dado por

$$\chi_{\mathrm{Res}V}(h) = \mathrm{Tr}(h\ |_{\mathrm{Res}V}) = \mathrm{Tr}(h\ |_V) = \chi_V\ |_H\ (h),$$

de modo que $\chi_V\ |_H$ es precisamente el carácter de $\mathrm{Res}V$. De este modo, obtenemos una aplicación $R^+(G) \to R^+(H)$ dada por $\psi \mapsto \psi\ |_V$ que claramente se extiende a un homomorfismo de anillos

$$\mathrm{Res}_H^G : R(G) \longrightarrow R(H).$$

Este homomorfismo es la restricción del homomorfismo $\mathrm{Res}_H^G : \mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G) \to \mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(H)$ dado por $\psi \mapsto \psi\ |_H$. Cabe recalcar que ninguno de los dos homomorfismos es, en general, sobreyectivo. Esto se debe a que las clases de conjugación en H, si bien están contenidas en las clases de conjugación de G, pueden ser estrictamente más pequeñas.

Observación. Se debe ser (aunque realmente no) muy cuidadoso con el uso de Res, pues dependiendo del contexto puede denotar al funtor de restricción o al homomorfismo de restricción. En cualquier caso, su significado siempre será claro para el contexto.

3.2. Representaciones inducidas

Durante esta subsección, G denotará un grupo y $H \leq G$ un subgrupo. Recordemos que el conjunto G/H formado por todas las clases laterales izquierdas de H en G no es necesariamente un grupo (a menos que $H \trianglelefteq G$ es un subgrupo normal). Si $g \in G$, la clase lateral izquierda gH es el conjunto

$$gH = \{gh \mid h \in H\} = \{h \in G \mid g^{-1}h \in H\},$$

y tenemos que

$$G = \bigcup_{g \in G} gH.$$

Más aún, dado que la relación $g \sim h \Leftrightarrow hg^{-1} \in H$ es una relación de equivalencia, las clases laterales gH son precisamente las clases de equivalencia para esta relación, es decir, $G/H = G/\sim$. Luego, un conjunto $T \subseteq G$ que contiene exactamente un representante de cada clase lateral izquierda se denomina una *transversal* de H en G (algunos también lo llaman un *sistema de representantes* o una *sección cruzada*), y tenemos que

$$G = \bigsqcup_{g \in T} gH,$$

donde $\sqcup$ indica que la unión es disjunta, es decir, $gH \cap g'H = \emptyset$ para todo $g, g' \in T$ con $g \neq g'$.

Ejercicio 3.3. Pruebe que para todo $g \in G$ existen únicos $t \in T$ y $h \in H$ tales que $g = th$.

Al número de elementos del conjunto G/H, o, lo que es lo mismo, al número de elementos de T se lo llama el *índice* de H en G y se lo denota por $[G : H]$ (algunos autores prefieren $(G : H)$ o $|G : H|$. Para estos últimos, ¿todo bien en casa?) Es un teorema muy famoso (y en extremo sencillo de demostrar), debido a Lagrange, que

$$|G| = [G : H]|H|.$$

En lo que sigue, T representará siempre una transversal de H en G tal que el representante de la clase lateral $H = 1H$ en T es 1.

Sea ahora $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación de G en V y sea $W \subseteq \mathrm{Res}_H^G(V)$ una subrepresentación de $\mathrm{Res}(V)$ (es decir, W es una representación de H). Recordemos que esto significa que para todo $h \in H$ se tiene que $h(W) \subseteq W$.

Lema 3.4. *Con la notación anterior, si $g, g' \in tH$ para cierto $t \in T$, entonces*

$$g(W) = g'(W).$$

Demostración. Sean $g, g' \in tH$, con $t \in T$, entonces $g^{-1}g' \in H$ y por ende existe $h \in H$ tal que $g' = gh$. Tenemos entonces que

$$g'(W) = g(h(W)) = g(W)$$

pues $h(W) = W$ para todo $h \in H$. ■

Por el lema anterior podemos definir, para cada $\sigma \in G/H$ el espacio

$$W_\sigma = g(W)$$

donde g es cualquier elemento de σ. Notemos que en particular

$$W_\sigma = t(W)$$

donde $\sigma = tH$, con $t \in T$.

Lema 3.5. *La aplicación*

$$\begin{array}{rcl} G \times \{W_\sigma \mid \sigma \in G/H\} & \longrightarrow & \{W_\sigma \mid \sigma \in G/H\} \\ (g, W_\sigma) & \longmapsto & g(W_\sigma) \end{array}$$

está bien definida y es una acción del grupo G sobre el conjunto $\{W_\sigma \mid \sigma \in G/H\}$.

Demostración. Para probar que esta aplicación está bien definida, debemos probar que si $g \in G$ y $\sigma \in G/H$, entonces $g(W_\sigma) = W_\tau$ para cierto $\tau \in G/H$. En efecto, sea $t \in T$ tal que $\sigma = tH$, entonces

$$g(W_\sigma) = g(tW) = (gt)(W),$$

y si $\tau = (gt)H \in G/H$ tenemos que $g(W_\sigma) = W_\tau$. Ahora, es claro que $1(W_\sigma) = W_\sigma$ y que si $g, g' \in G$ entonces $(gg')(W) = g(g'(W))$, por ende obtenemos una acción de G sobre $\{W_\sigma \mid \sigma \in G/H\}$. ∎

Lema 3.6. *El subespacio*

$$\sum_{\sigma \in G/H} W_\sigma \subseteq V$$

es una subrepresentación de V (i.e. una representación de G).

Demostración. Sea $g \in G$, entonces

$$g\left(\sum_{\sigma \in G/H} W_\sigma\right) = \sum_{\sigma \in G/H} g(W_\sigma) \subseteq \sum_{\sigma \in G/H} W_\sigma,$$

donde en la última inclusión utilizamos el lema precedente. ∎

Definición. La representación V de G se dice que es *inducida* por la representación W de H si

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma.$$

En este caso, escribiremos

$$V = \mathrm{Ind}_H^G W.$$

Ejercicio 3.7. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) V es inducida por W;

(ii) Todo $v \in V$ puede escribirse de manera única en la forma

$$v = \sum_{\sigma \in G/H} w_\sigma$$

con $w_\sigma \in W_\sigma$ para cada $\sigma \in G/H$

(iii) Para cualquier transversal de H en G,

$$V = \bigoplus_{t \in T} t(W).$$

Ayuda: Utilice el lema de Sc... ¡ah, no!, esta vez no debe usar el lema de Schur. Sin embargo el resultado es trivial. Su trabajo es darse cuenta de por qué esto es trivial.

Proposición 3.8. *Si V es la representación de G inducida por la representación W de H, entonces*

$$\dim(V) = [G : H] \dim(W).$$

Demostración. Esto es una simple verificación: Como

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma$$

tenemos que

$$\dim(V) = \sum_{\sigma \in G/H} \dim(W_\sigma),$$

pero $W_\sigma = g(W)$ para cualquier $g \in G$ y como $g \mid_V$ es un isomorfismo de V, se tiene que $\dim(W_\sigma) = \dim(W)$ para todo $\sigma \in G/H$ y de este modo

$$\dim(V) = \sum_{\sigma \in G/H} \dim(W) = |G/H| \dim(W) = [G : H] \dim(W).$$

■

Ejemplo 3.9. Sea $V = \mathbb{C}[G]$ la representación regular de G y $W = \mathbb{C}[H]$ la representación regular de H, entonces

$$V = \mathrm{Ind}_H^G W.$$

En efecto, recordemos que V tiene una base $(e_g)_{g \in G}$ indexada por los elementos de G y el conjunto $(e_h)_{h \in H}$ es una base de W. Sea T una transversal de H en G, entonces, para $\sigma = tH \in G/H$ tenemos que

$$W_\sigma = \bigoplus_{h \in H} \mathbb{C} e_{th}$$

y de este modo, dado que todo $g \in G$ se escribe de manera única en la forma th con $t \in T$ y $h \in H$, tenemos que

$$V = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{C} e_g = \bigoplus_{t \in T} \bigoplus_{h \in H} \mathbb{C} e_{th} = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma.$$

Ejemplo 3.10. Sea $X = G/H$, sobre el cual G actúa por multiplicación a la izquierda, es decir, si $\sigma \in G/H$ con $\sigma = tH$, entonces $g\sigma = \tau$ con $\tau = (gt)H$. Sea V la representación de permutación asociada a esta acción de G sobre G/H, de modo que V tiene una base $(e_\sigma)_{\sigma \in G/H}$ indexada por los elementos de G/H y $ge_\sigma = e_{g\sigma}$. Consideremos el subespacio de dimensión 1 generado por e_H, es decir $W = \mathbb{C} e_H$. Esta es claramente (isomorfa a) la representación trivial de H. Veamos que

$$V = \mathrm{Ind}_H^G W.$$

En efecto, si T es una transversal de H en G con $1 \in T$, entonces

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} \mathbb{C} e_\sigma = \bigoplus_{t \in T} \mathbb{C} e_{tH} = \bigoplus_{t \in T} t(\mathbb{C} e_H) = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma.$$

Dicho de otro modo, la representación de permutación de la acción de G sobre G/H es inducida por la representación trivial de H.

Dada una representación V de G inducida por una representación W de H, tenemos por definición que

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma.$$

Cuando $\sigma = H$, tenemos que $W_\sigma = W$ de modo que $W \subseteq V$. De este modo existe una aplicación lineal canónica $\iota : W \to V = \mathrm{Ind}_H^G(W)$, que es simplemente la inclusión de W en V. De manera similar, la aplicación identidad $V \to \mathrm{Res}_H^G(V)$ (y $\mathrm{Res}_H^G(V) \to V$) es una aplicación lineal, pero no un morfismo de representaciones (obviamente, pues V es una representación de G mientras que $\mathrm{Res}(V)$ es una representación de H. Lo sé, es un comentario estúpido, pero a veces es bueno aclarar las cosas).

Teorema 3.11 (Propiedad universal)**.** *Sean V, V' dos representaciones de G tal que V es inducida por una representación W de H. Entonces para cualquier morfismo de representaciones $f : W \to \mathrm{Res}_H^G(V')$ existe un único morfismo de representaciones $\widetilde{f} : V \to V'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & V = \mathrm{Ind}_G^H(W) \arrow[d, dashed, "\widetilde{f}"] \\ \mathrm{Res}_H^G(V') \arrow[r] & V'. \end{tikzcd}$$

Demostración. Escribamos
$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma.$$
Por ende, basta definir $\widetilde{f}$ en cada sumando W_σ. Sea $v \in W_\sigma$ y sea $g \in \sigma = gH$. Notemos que $v = gw$ para cierto $w \in W$, y de este modo $g^{-1}v = w \in W$. Así, definimos
$$\widetilde{f}(v) = gf(g^{-1}v).$$
Notemos que $\widetilde{f}(v)$ está bien definido, es decir, no depende de la elección de $g \in \sigma$. En efecto, sea $g' \in \sigma$, de modo que $g^{-1}g' \in H$ y así $g' = gh$ para cierto $h \in H$, con lo cual tenemos que
$$g'f((g')^{-1}v) = ghf(h^{-1}g^{-1}v) = g(hf(h^{-1}(g^{-1}v))) = gf(hh^{-1}(gv)) = gf(g^{-1}v),$$
donde hemos usado el hecho de que f es un morfismo de representaciones de H. Esto implica que la definición de $\widetilde{f} : W_\sigma \to V'$ depende únicamente de σ y no de los representantes de σ. En general, si $v \in V$ podemos escribir $v = \sum_{\sigma \in G/H} w_\sigma$ para únicos $w_\sigma \in W_\sigma$ y de este modo
$$\widetilde{f}(v) = \sum_{\sigma \in G/H} \widetilde{f}(w_\sigma)$$
define completamente a $\widetilde{f} : V \to V'$. Claramente $\widetilde{f}$ es lineal, por lo que debemos probar que es un morfismo de representaciones: Sea $g \in G$ y sea $v = \sum_{\sigma \in G/H} w_\sigma \in V$ con $w_\sigma \in W_\sigma$. Entonces, tenemos que $gw_\sigma \in g\sigma$ y si escogemos $g_\sigma \in g\sigma$, tenemos que
$$\widetilde{f}(gv) = \sum_{\sigma \in G/H} \widetilde{f}(gw_\sigma) = \sum_{\sigma \in G/H} g_\sigma f(g_\sigma^{-1} g w_\sigma) = g \sum_{\sigma \in G/H} g^{-1} g_\sigma f(g_\sigma^{-1} g w_\sigma)$$
Ahora, tenemos que $g^{-1}g_\sigma \in \sigma \in G/H$ y escribiendo $g'_\sigma = g^{-1}g_\sigma$ para cada $\sigma \in G/H$ tenemos que
$$\widetilde{f}(gv) = g \sum_{\sigma \in G/H} g'_\sigma f((g'_\sigma)^{-1} w_\sigma) = g\widetilde{f}(v),$$
por lo que $\widetilde{f}$ es un morfismo de representaciones.

Para probar que el diagrama conmuta, sea $w \in W$, entonces como $1 \in H$,
$$\widetilde{f}(w) = 1f(1^{-1}w) = f(w),$$

de donde

$$\widetilde{f} \circ \iota(w) = \widetilde{f}(x) = f(w) = \mathrm{id}_{V'} \circ f(w).$$

Esto completa la demostración de la existencia.

Para la unicidad, sea $\widetilde{\widetilde{f}} : V \to V'$ un morfismo de representaciones que también hace conmutar al diagrama. Sea $v \in W_\sigma$ y sea $g \in \sigma$, entonces tenemos que $g^{-1}w \in W$ y así

$$\widetilde{\widetilde{f}}(v) = \widetilde{\widetilde{f}}(gg^{-1}v) = g\widetilde{\widetilde{f}}(g^{-1}v) = gf(g^{-1}v) = \widetilde{f}(v).$$

De este modo las restricciones de $\widetilde{\widetilde{f}}$ y $\widetilde{f}$ a cada sumando directo W_σ coinciden, por lo que $\widetilde{\widetilde{f}} = \widetilde{f}$. ■

Corolario 3.12. *Sean V y V' representaciones de G inducidas por representaciones W y W' de H, respectivamente. Si $W \cong W'$ entonces $V \cong V'$.*

Demostración. Sea $f : W \to W'$ un isomorfismo de representaciones de H. La inclusión $i' : W' \to \mathrm{Res}_H^G(V')$ es un morfismo de representaciones (verificarlo) y por ende $i' \circ f : W \to \mathrm{Res}(V')$ es un morfismo de representaciones de H. La propiedad universal establece que existe un único morfismo de representaciones de G, $\widetilde{f} : V \to V'$ cuya restricción a W coincide con $i' \circ f$. El mismo argumento con f^{-1} en lugar de f muestra que existe un morfismo de representaciones de G, $\widetilde{f^{-1}} : V' \to V$ cuya restricción a W' es la composición $W' \to W \to \mathrm{Res}(V)$. Es inmediato que $\widetilde{f} \circ \widetilde{f^{-1}} = \mathrm{id}_{V'}$ y $\widetilde{f^{-1}} \circ \widetilde{f} = \mathrm{id}_V$, por lo que $\widetilde{f} : V \to V'$ es un isomorfismo de representaciones. ■

Ejercicio 3.13. Pruebe que, en la demostración anterior, efectivamente se tiene que $\widetilde{f} \circ \widetilde{f^{-1}} = \mathrm{id}_{V'}$ y $\widetilde{f^{-1}} \circ \widetilde{f} = \mathrm{id}_V$.

Proposición 3.14. *Sean V_1 y V_2 dos representaciones de G inducidas por representaciones W_1 y W_2 de H, respectivamente. Entonces*

$$V_1 \oplus V_2 = \mathrm{Ind}_H^G(W_1 \oplus W_2).$$

Dicho de otro modo,

$$\mathrm{Ind}_H^G(W_1 \oplus W_2) = \mathrm{Ind}_H^G(W_1) \oplus \mathrm{Ind}_H^G(W_2),$$

es decir (el funtor) Ind_H^G conmuta con las sumas directas.

Demostración. Escribimos

$$V_1 = \bigoplus_{\sigma \in G/H} (W_1)_\sigma \qquad \text{y} \qquad V_2 = \bigoplus_{\sigma \in G/H} (W_2)_\sigma,$$

de modo que

$$V_1 \oplus V_2 = \bigoplus_{\sigma \in G/H} (W_1)_\sigma \oplus \bigoplus_{\sigma \in G/H} (W_2)_\sigma = \bigoplus_{\sigma \in G/H} ((W_1)_\sigma \oplus (W_2)_\sigma).$$

Probemos que para todo $\sigma \in G/H$ se tiene que $(W_1 \oplus W_2)_\sigma = (W_1)_\sigma \oplus (W_2)_\sigma$. Esto es inmediato: sea $t \in T$, con T una transversal de H en G, tal que $\sigma = tH$, entonces

$$(W_1 \oplus W_2)_\sigma = t(W_1 \oplus W_2) = t(W_1) \oplus t(W_2) = (W_1)_\sigma \oplus (W_2)_\sigma.$$

De este modo

$$V_1 \oplus V_2 = \bigoplus_{\sigma \in G/H} (W_1)_\sigma \oplus (W_2)_\sigma = \bigoplus_{\sigma \in G/H} (W_1 \oplus W_2)_\sigma = \mathrm{Ind}_H^G(W_1 \oplus W_2).$$

■

Proposición 3.15. *Sea V una representación de G inducida por una representación W de H. Sea $W' \subseteq W$ una subrepresentación de W de H y sea*

$$V' = \sum_{\sigma \in G/H} W'_\sigma = \sum_{t \in T} t(W'),$$

donde T es una transversal de H en G. Entonces V' es una subrepresentación de V de G y además

$$V' = \mathrm{Ind}_H^G W'.$$

Demostración. Para cada $\sigma \in G/H$ tenemos que $W'_\sigma \subseteq W_\sigma$, de modo que la suma $\sum_{\sigma \in G/H} W'_\sigma$ es directa. El hecho de que V' es una subrepresentación de V se sigue del Lema 3.6. ■

Proposición 3.16. *Sean U y V representaciones de G tal que V es inducida por una representación W de H. Entonces la representación $U \otimes V$ de G es inducida por la representación $\mathrm{Res}_H^G(U) \otimes W$ de H. Dicho de otro modo,*

$$U \otimes \mathrm{Ind}_H^G(W) = \mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(U) \otimes W).$$

Demostración. Escribamos

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma,$$

entonces tenemos que

$$U \otimes V = U \otimes \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma = \bigoplus_{g \in G/H} (U \otimes W_\sigma).$$

Probemos que

$$(U \otimes W_\sigma) = (\mathrm{Res}(U) \otimes W)_\sigma, \qquad \text{para todo } \sigma \in G/H.$$

Sea T una transversal de H en G y sea $\sigma = tH$ con $t \in T$. Entonces $t(\mathrm{Res}(U)) = U$ y así

$$(\mathrm{Res}(U) \otimes W)_\sigma = t(\mathrm{Res}(U) \otimes W) = t(\mathrm{Res}(U)) \otimes t(W) = U \otimes W_\sigma,$$

lo que completa la demostración. ■

Corolario 3.17. *Sea U una representación de G. Entonces, si V es la representación de permutación de la acción de G en G/H, tenemos que*

$$\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(U)) \cong U \otimes V.$$

Demostración. Recordemos que, por el Ejemplo 3.10, $V = \mathrm{Ind}_H^G(\mathbf{1})$ donde $\mathbf{1}$ es la representación trivial de H. Además, por el Ejercicio 2.7 sabemos que $\mathrm{Res}(U) \otimes \mathbf{1} \cong \mathrm{Res}(U)$, y por el Corolario

3.12 se tiene que $\operatorname{Ind}_H^G(\operatorname{Res}_H^G(U)) \cong \operatorname{Ind}_H^G(\operatorname{Res}_H^G(U) \otimes \mathbf{1})$. De este modo, por la proposición anterior,

$$\operatorname{Ind}_H^G(\operatorname{Res}_H^G(U)) \cong \operatorname{Ind}_H^G(\operatorname{Res}_H^G(U) \otimes \mathbf{1}) \cong U \otimes \operatorname{Ind}_G^H(\mathbf{1}) \cong U \otimes V,$$

como se deseaba probar. ∎

Teorema 3.18. *Dada una representación W de H, existe una única (salvo isomorfismo) representación V de G tal que $V = \operatorname{Ind}_H^G(W)$.*

Demostración. La unicidad es precisamente el contenido del Corolario 3.12. Para probar la existencia supongamos primero que W es irreducible. Por la Proposición 2.18 sabemos que W es isomorfa a una subrepresentación W' de la representación regular $\mathbb{C}[H]$. Pero por el Ejemplo 3.9, tenemos que

$$\mathbb{C}[G] = \operatorname{Ind}_H^G(\mathbb{C}[H]).$$

Sea $V' = \sum_{\sigma \in G/H} W'_\sigma$. Por la Proposición 3.15 tenemos que V' es una representación de G, que es una subrepresentación de $\mathbb{C}[G]$ y que es inducida por W'. De este modo V' es una representación de G inducida por W.

Si W no es irreducible, podemos descomponerla en una suma directa de representaciones irreducibles $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$, y para cada i existe una representación V_i de G inducida por W_i. De este modo, por la Proposición 3.14 tenemos que

$$V_1 \oplus \cdots \oplus V_r = \operatorname{Ind}_H^G(W_1 \oplus \cdots \oplus W_r) = \operatorname{Ind}_H^G(W),$$

lo que completa la demostración. ∎

Observación. La proposición anterior proporciona un método para *inducir* representaciones. Sin embargo, a primera vista, esta construcción parece no ser funtorial: Dada una representación W de H, estamos obteniendo una representación V de G que contiene una subrepresentación W' de H isomorfa a W tal que $V = \operatorname{Ind}(W')$ y a esta representación la consideramos como la representación inducida por W. En la siguiente sección probaremos que, en efecto, Ind_H^G define un funtor, y daremos una demostración mucho más transparente del teorema anterior.

3.3. Inducción de representaciones: La reciprocidad de Frobenius

Igual que antes, sea G un grupo finito y $H \leq G$ un subgrupo. El álgebra de grupo $\mathbb{C}[G]$ tiene una estructura natural de $(\mathbb{C}[G], \mathbb{C}[H])$-bimódulo dada por multiplicación.

Lema 3.19. *$\mathbb{C}[G]$ es un $\mathbb{C}[H]$-módulo derecho libre. Si T es una transversal de H en G, entonces T es una base de $\mathbb{C}[G]$ sobre $\mathbb{C}[H]$*

Demostración. Sean $\alpha_t = \sum_{h \in H} a_{t,h} h \in \mathbb{C}[H]$, con $a_{t,h} \in \mathbb{C}$ para cada $t \in T$ y $h \in H$, tales que

$$0 = \sum_{t \in T} t\alpha_t = \sum_{t \in T} \sum_{h \in H} a_{t,h} th.$$

Dado que todo elemento de G se escribe de manera única en la forma th con $t \in T$ y $h \in H$ y que G es linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$, se sigue que $a_{t,h} = 0$ para todo $t \in T$ y todo $h \in H$, de donde $\alpha_t = 0$ para todo $t \in H$. De este modo el conjunto T es linealmente independiente por la derecha sobre $\mathbb{C}[H]$. Si $g \in G$, existen únicos $t \in T$ y $h \in H$ tales que $g = th$, de modo que todos los generadores de $\mathbb{C}[G]$ están en el $\mathbb{C}[H]$-submódulo derecho de $\mathbb{C}[G]$ generado por T. ∎

De este modo, dado un $\mathbb{C}[H]$-módulo (o, lo que es lo mismo, una representación de H) W, entonces

$$\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$$

es un $\mathbb{C}[G]$-módulo. Asumamos ahora que W es una subrepresentación de $\mathrm{Res}_H^G(V)$ para cierta representación V de G. Entonces V es un $\mathbb{C}[G]$-módulo. Más aún, vemos que

$$V' := \sum_{\sigma \in G/H} W_\sigma \subseteq V$$

es una subrepresentación de V (ver el Lema 3.6) y por ende un $\mathbb{C}[G]$-submódulo de V. Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}[G] \times W & \longrightarrow & V \\ (g, w) & \longmapsto & gw. \end{array}$$

Esta aplicación es $\mathbb{C}[H]$-balanceada, pues si $g \in G$, $h \in H$ y $w \in W$, tenemos que

$$(gh)w = g(hw),$$

y de este modo induce un morfismo de grupos abelianos

$$\begin{array}{rrcl} \gamma : & \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W & \longrightarrow & V \\ & g \otimes w & \longmapsto & gw \end{array}$$

que es claramente un morfismo de $\mathbb{C}[G]$-módulos.

Lema 3.20. *El homomorfismo γ construido anteriormente es inyectivo y su imagen es V'.*

Demostración. Por el Lema 3.19, dada una base $w_1, \ldots, w_m$ de W, todo elemento de $\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$ puede escribirse en la forma $\sum_{t \in T} \sum_{i=1}^{m} a_{t,i} t \otimes w_i$. Sea entonces $x = \sum_{t \in T} \sum_{i=1}^{m} a_{t,i} t \otimes w_i \in \mathrm{Ker}(\gamma)$, esto significa que

$$\sum_{t \in T} \sum_{i=1}^{m} a_{t,i} t w_i = 0.$$

Pero los vectores tw_i son linealmente idependientes en V (¿Por qué?), de modo que todo $a_{t,i} = 0$ y por ende $x = 0$. Que la imagen de γ es V' es inmediato de las definiciones, ya que todo elemento de V' es combinación lineal de vectores de la forma tw_i con $t \in T$ e $i = 1, \ldots, m$. ■

Proposición 3.21. *La representación V es inducida por W si y sólo si el homomorfismo*

$$\gamma : \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W \longrightarrow V$$

es un isomorfismo de $\mathbb{C}[G]$-módulos.

Demostración. V es inducida por W si y sólo si $V = V'$, pero V' es la imagen de γ, por ende V es inducida por W si y sólo si γ es sobreyectiva. Como γ es inyectiva por el lema anterior, se sigue el resultado. ■

Motivados por la proposición anterior, definimos el funtor

$$\mathrm{Ind}_H^G : \mathbb{C}[H]\text{-}\mathbf{mod} \longrightarrow \mathbb{C}[G]\text{-}\mathbf{mod}$$

por
$$\mathrm{Ind}_H^G(W) = \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$$
para cada $\mathbb{C}[H]$-módulo W. Si $f : W \to W'$ es un morfismo de $\mathbb{C}[H]$-módulos, definimos
$$\mathrm{Ind}_H^G(f) = \mathrm{id}_{\mathbb{C}[G]} \otimes f : \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W \longrightarrow \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W'.$$

Ejercicio 3.22. (De teoría de categorías) Verifique que este es efectivamente un funtor. Más aún, es un funtor aditivo entre las categorías abelianas de $\mathbb{C}[G]$-módulos y $\mathbb{C}[H]$-módulos.

La ventaja de esta nueva definición es la siguiente:

Otra demostración del Teorema 3.18. La existencia viene de la definición del funtor Ind_H^G. La unicidad es simple: Si $W \cong W'$ como $\mathbb{C}[H]$-módulos, entonces
$$\mathrm{Ind}_H^G(W) = \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W \cong \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W' = \mathrm{Ind}_H^G(W').$$
■

Sean V un $\mathbb{C}[G]$-módulo y W un $\mathbb{C}[H]$-módulo. Definimos aplicaciones
$$\Phi = \Phi_{W,V} : \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathrm{Ind}_H^G(W), V) \quad \longrightarrow \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[H]}(W, \mathrm{Res}_H^G(V))$$
y
$$\Psi = \Psi_{W,V} : \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[H]}(W, \mathrm{Res}_H^G(V)) \quad \longrightarrow \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathrm{Ind}_H^G(W), V)$$
del siguiente modo: Si $f : (\mathrm{Ind}_H^G(W) \to V$ es un morfismo de $\mathbb{C}[G]$-módulos, entonces $\Phi(f) : W \to \mathrm{Res}_H^G(V)$ es el morfismo de $\mathbb{C}[H]$-módulos definido por
$$\Phi(f)(w) = f(1 \otimes w), \qquad \text{para todo } w \in W.$$
En cambio, si $h : W \to \mathrm{Res}_H^G(V)$, la aplicación $h' : \mathbb{C}[G] \times W \to V$ dada por $h'(g, w) = gh(w)$ es claramente $\mathbb{C}[H]$-balanceada y por ende induce un único homomorfismo de grupos abelianos $\Psi(h) : \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W \to V$, que consideramos como definición de Ψ. Notemos que, de esta definición,
$$\Psi(h)(g \otimes w) = gh(w), \qquad \text{para todo } g \in G, w \in W.$$

Teorema 3.23 (Reciprocidad de Frobenius)**.** *Las aplicaciones Φ y Ψ son mutuamente inversas, es decir*
$$\Phi \circ \Psi = id \qquad y \qquad \Psi \circ \Phi = id.$$
Más aún, si $\alpha : V \to V'$ es un homomorfismo de $\mathbb{C}[G]$-módulos y $\beta : W \to W'$ es un homomorfismo de $\mathbb{C}[H]$-módulos, entonces el diagrama
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathrm{Ind}_H^G(W'), V) \arrow[r, "\mathrm{Ind}(\beta)^*"] \arrow[d, "\Phi_{W',V}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathrm{Ind}_H^G(W), V) \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d, "\Phi_{W,V}"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathrm{Ind}_H^G(W), V') \arrow[d, "\Phi_{W,V'}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[H]}(W', \mathrm{Res}_H^G(V)) \arrow[r, "\beta^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[H]}(W, \mathrm{Res}_H^G(V)) \arrow[r, "\mathrm{Res}(\alpha)_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[H]}(W, \mathrm{Res}_H^G(V')).
\end{tikzcd}$$
conmuta.

Observación. Dados un anillo A y un A-módulo P, entonces todo homomorfismo de A-módulos $\alpha : M \to N$ induce una aplicación (de conjuntos) $\alpha^* : \mathrm{Hom}(N, P) \to \mathrm{Hom}(M, P)$ que a cada $f : N \to P$ aplica en $\alpha^*(f) = f \circ \alpha : M \to P$. Similarmente todo morfismo $\beta : M \to N$ induce una aplicación $\beta_* : \mathrm{Hom}(P, M) \to \mathrm{Hom}(P, N)$ que a cada $h : P \to M$ aplica en $\beta_*(h) = \beta \circ h : P \to N$. Dicho de otro modo, $\mathrm{Hom}(-, P)$ es un funtor contravariante de la categoría de A-módulos en la categoría de conjuntos y $\mathrm{Hom}(P, -)$ es un funtor covariante de la categoría de A-módulos en la categoría de conjuntos.

Demostración. Esta es una simple verificación: Con la notación anterior, si $w \in W$ y $g \in G$ tenemos que

$$(\Phi \circ \Psi)(h)(w) = \Phi(\Psi(h))(w) = \Psi(h)(1 \otimes w) = 1h(w) = h(w)$$

y

$$(\Psi \circ \Phi)(f)(g \otimes w) = \Psi(\Phi(f))(g \otimes w) = g\Phi(f)(w) = gf(1 \otimes w) = f(g(1 \otimes w)) = f(g \otimes w)$$

donde en la penúltima igualdad hemos usado el hecho de que f es un morfismo de $\mathbb{C}[G]$-módulos. ■

Ejercicio 3.24. Complete la demostración verificando que el diagrama dado es conmutativo. *Ayuda: Esto es una simple verificación, no hay ningún tipo de trampa.*

Observación. Al estudiante aventajado, el teorema anterior le puede resultar muy familiar: Lo que establece es que precisamente Ind_H^G es el funtor adjunto por izquierda del funtor Res_H^G (y al revés, que Res_H^G es el funtor adjunto por derecha de Ind_H^G). En particular esto implica que Res_H^G es exacto por izquierda y que Ind_H^G es exacto por derecha.

Ejercicio 3.25 (Un ejercicio que toda persona interesada en teoría de representaciones debe hacer al menos una vez en su vida, pero por ahora, destinado a quienes conocen un poco más de categorías)**.** Definimos un funtor $\mathrm{Coind}_H^G : \mathbb{C}[H]\text{-}\mathbf{mod} \to \mathbb{C}[G]\text{-}\mathbf{mod}$ del siguiente modo: Si W es un $\mathbb{C}[H]$-módulo, entonces

$$\mathrm{Coind}_H^G(W) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[H]}(\mathbb{C}[G], W),$$

en donde, como $\mathbb{C}[G]$ es un $(\mathbb{C}[G], \mathbb{C}[H])$-bimódulo, tenemos que $\mathrm{Coind}_H^G(W)$ es un $\mathbb{C}[G]$-módulo. Si $f : W \to W'$ es un homomorfismo de $\mathbb{C}[H]$-módulos, definimos $\mathrm{Coind}_H^G(f) = f_* : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[H]}(\mathbb{C}[G], W) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[H]}(\mathbb{C}[G], W')$.

(a) Describa la estructura de $\mathbb{C}[G]$-módulo sobre $\mathrm{Coind}_H^G(W)$ y pruebe que f_* es un homomorfismo de $\mathbb{C}[G]$-módulos.

(b) Pruebe que $\mathrm{Coind}_H^G(W)$ es un funtor adjunto por derecha del funtor Res_H^G.

(c) Pruebe que los funtores $\mathrm{Coind}_H^G(W)$ y $\mathrm{Ind}_H^G(W)$ son naturalmente isomorfos.

(d) Concluya que los funtores Ind_H^G y Res_H^G son un par de funtores biadjuntos y, en particular, que ambos funtores son exactos.

3.4. Inducción de caracteres: La reciprocidad de Frobenius clásica

La versión original del teorema de reciprocidad de Frobenius es un poco diferente a como la enunciamos en la sección anterior. Esta versión original hace referencia a caracteres. Pero antes de aventurarnos a ella, es necesario estudiar cómo se comportan los caracteres bajo el proceso de inducción. Vimos anteriormente que el carácter de la restricción de una representación es precisamente la restricción del carácter. Sin embargo, para el caso de la inducción el asunto no es tan simple. En lo que sigue, denotaremos por $(\cdot \mid \cdot)_G$ al producto interno del espacio $\mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G)$ y por $(\cdot \mid \cdot)_H$ al producto interno del espacio $\mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(H)$.

Recordemos que tenemos un homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $\mathrm{Res}_H^G : \mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G) \to \mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(H)$ que en consecuencia es una aplicación $\mathbb{C}$-lineal entre espacios con producto interno. Cabe entonces preguntarse cuál es operador adjunto $(\mathrm{Res}_H^G)^* : \mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(H) \to \mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G)$, es decir, el único operador que verifica la igualdad

$$(\varphi \mid \mathrm{Res}_H^G(\psi))_H = ((\mathrm{Res}_H^G)^*(\varphi) \mid \psi)_G, \qquad \text{para todo } \varphi \in \mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(H), \psi \in \mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G).$$

Sean $\varphi \in \mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(H)$ y $\psi \in \mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G)$, y escribamos $\varphi' = (\mathrm{Res}_H^G)^*(\varphi)$. Entonces debemos tener

$$\frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \varphi(h)\overline{\psi(h)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi'(g)\overline{\psi(g)}.$$

Fijemos $g_0 \in G$ y sea C la clase de conjugación de g_0 en G. Elijamos ψ como la función que toma el valor de 1 en C y 0 fuera de C. Como φ' es una función de clases, φ' es constante en C, con valor $\varphi'(g_0)$ y de este modo obtenemos

$$\frac{|C|}{|G|}\varphi'(g_0) = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H \cap C} \varphi(h).$$

Notemos que $h \in H \cap C$ si y sólo si $h \in H$ y $h = gg_0g^{-1}$ para algún $g \in G$. Ahora, notemos que la expresión de un elemento $h \in H$ en la forma gg_0g^{-1} con $g \in G$ no es única: Si $g_1, g_2 \in G$ son tales que $g_1g_0g_1^{-1} = g_2g_0g_2^{-1}$ entonces $(g_2^{-1}g_1)g_0(g_2^{-1}g_1)^{-1} = g_0$, lo que significa que $g_2^{-1}g_1$ pertenecen al estabilizador $\mathrm{Stab}_G(g_0)$ de g_0 por la acción de G sobre sí mismo por conjugación. Por el teorema órbita-estabilizador, sabemos que existe una biyección $G/\mathrm{Stab}_G(g_0) \to C$ pues C es la órbita de g_0 bajo esta acción; por ende

$$\frac{|C|}{|G|}\varphi'(g_0) = \frac{1}{|H|}\frac{1}{|\mathrm{Stab}_G(g_0)|} \sum_{\substack{g \in G \\ gg_0g^{-1} \in H}} \varphi(gg_0g^{-1}) = \frac{1}{|H|}\frac{1}{|G|/|C|} \sum_{\substack{g \in G \\ gg_0g^{-1} \in H}} \varphi(gg_0g^{-1}),$$

de donde

$$\varphi'(g_0) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{g \in G \\ gg_0g^{-1} \in H}} \varphi(gg_0g^{-1}).$$

Dado que $g_0 \in G$ es arbitrario, obtenemos que

$$(\mathrm{Res}_H^G)^*(\varphi)(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{h \in G \\ hgh^{-1} \in H}} \varphi(hgh^{-1}), \qquad \text{para todo } g \in G, \varphi \in \mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G).$$

Este cálculo, a más de ser interesante por derecho propio, resulta que nos da la fórmula para el carácter de una representación inducida:

Teorema 3.26. *Sea W una representación de H y $V = \mathrm{Ind}_H^G(W)$, entonces*

$$\chi_V = (\mathrm{Res}_H^G)^*(\chi_W),$$

es decir,

$$\chi_V(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{h \in G \\ hgh^{-1} \in H}} \chi_W(hgh^{-1}), \qquad \textit{para todo } g \in G.$$

Demostración. Escribamos $V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma$. Si $g \in G$ tenemos que $g(W_\sigma) = W_{g\sigma}$ y por ende los sumandos que contribuyen a la traza de $g\,|_V$ son aquellos tales que $g\sigma = \sigma$. Sea $t \in \sigma$, entonces $g\sigma = \sigma$ si y sólo si $t^{-1}gt \in H$, de modo que, si T es una transversal de H en G

$$\chi_V(g) = \sum_{\substack{t \in T \\ t^{-1}gt \in H}} \mathrm{Tr}(g\,|_{t(W)}).$$

Probaremos que para todo $g \in G$ y todo $t \in T$ tal que $t^{-1}gt \in H$ se verifica

$$\mathrm{Tr}(g\,|_{t(W)}) = \chi_W(t^{-1}gt).$$

Para esto, basta notar que para tales t y g se tiene que

$$t\,|_W \circ (t^{-1}gt)\,|_W = g\,|_{t(W)} \circ t\,|_W,$$

y por ende

$$(t^{-1}gt)\,|_W = (t\,|_W)^{-1} \circ g\,|_{t(W)} \circ t\,|_W,$$

de donde

$$\mathrm{Tr}(g\,|_{t(W)}) = \mathrm{Tr}((t\,|_W)^{-1} \circ g\,|_{t(W)} \circ t\,|_W) = \mathrm{Tr}((t^{-1}gt)\,|_W) = \chi_W(t^{-1}gt).$$

Con esto tenemos que

$$\chi_V(g) = \sum_{\substack{t \in T \\ t^{-1}gt \in H}} \chi_W(t^{-1}gt) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{h \in G \\ hgh^{-1} \in H}} \chi_W(hgh^{-1}),$$

pues $|G| = |T||H|$. Esto completa la demostración. ■

Este teorema motiva la siguiente definición

Definición. Definimos el operador $\mathrm{Ind}_H^G : \mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(H) \to \mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G)$ como el operador $\mathrm{Ind}_H^G = (\mathrm{Res}_H^G)^*$, es decir,

$$\mathrm{Ind}_H^G(\varphi)(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{h \in G \\ hgh^{-1} \in H}} \varphi(hgh^{-1}), \qquad \text{para todo } g \in G, \varphi \in \mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G).$$

Si χ_W es el carácter de una representación W de H y si $V = \mathrm{Ind}_H^G(W)$, diremos que el carácter $\chi_V = \mathrm{Ind}_H^G(\chi_W)$ es el carácter inducido por χ_W.

Teorema 3.27 (Reciprocidad de Frobenius clásica)**.** *Sean V una representación de G y W una representación de H, entonces*

$$(\mathrm{Ind}(\chi_W) \mid \chi_V)_G = (\chi_W \mid \mathrm{Res}(\chi_V))_H.$$

Demostración. Esto es inmediato del hecho de que Ind es el operador adjunto de Res. ■

Ejercicio 3.28 (Una demostración directa de la reciprocidad de Frobenius clásica)**.** Si V_1, V_2 son dos $\mathbb{C}[G]$-módulos (o, equivalentemente, dos representaciones de G), definimos

$$\langle V_1, V_2 \rangle_G = \dim \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2).$$

(a) Muestre que $\langle V_1, V_2 \rangle_G = (\chi_{V_1} \mid \chi_{V_2})_G$.

(b) Sea W una representación de H y V una representación de G. Usando la reciprocidad de Frobenius (no clásica) pruebe que

$$\langle \mathrm{Ind}_H^G(W), V \rangle_G = \langle W, \mathrm{Res}_H^G(V) \rangle_H.$$

(c) Deduzca la reciprocidad de Frobenius clásica de (a) y (b).

3.5. El teorema de Wedderburn-Artin y la transformada de Fourier

El teorema de Maschke implica que todo $\mathbb{C}[G]$-módulo puede descomponerse en una suma directa de $\mathbb{C}[G]$-módulos simples. En el lenguaje de la teoría de anillos, esto significa que el álgebra de grupo $\mathbb{C}[G]$ es una $\mathbb{C}$-álgebra semisimple. Recordemos el teorema de Wedderburn-Artin para álgebras semisimples:

Teorema 3.29 (Wedderburn-Artin)**.** *Sea R una k-álgebra semisimple de dimensión finita. Entonces R es isomorfa a un producto directo de álgebras de matrices*

$$R \cong \mathbf{M}_{n_1}(\Delta_1) \times \cdots \times \mathbf{M}_{n_p}(\Delta_p)$$

donde n_i son enteros positivos y Δ_i son k-álgebras de división de dimensión finita para todo $1 \leq i \leq p$.

Para una demostración de este teorema en el caso de anillos, se sugiere el libro de T. Y. Lam, *A first course in noncommutative rings*. Omitiremos la demostración en este cursillo pues esta no se enmarca en la visión del mismo.

Nótese que como $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, toda $\mathbb{C}$-álgebra de división de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$ es igual a $\mathbb{C}$, de modo, que para el caso del álgebra de grupo se tiene que

$$\mathbb{C}[G] \cong \mathbf{M}_{n_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times \mathbf{M}_{n_p}(\mathbb{C})$$

para ciertos enteros positivos $n_1, \ldots, n_p$.

Sin embargo, disponer de un teorema así y no demostrarlo deja un sinsabor y una mala imagen del tutor de este curso. Por ende, en lo que sigue, presentaremos una demostración de este teorema que hace uso de la teoría de representaciones para el caso particular del álgebra $\mathbb{C}[G]$.

Sea r el número de clases de conjugación de G, entonces existen exactamente r representaciones irreducibles de G (salvo isomorfismo) $W_1, \dots, W_r$, o lo que es lo mismo, r $\mathbb{C}[G]$-módulos simples. Si $n_i = \dim W_i$, la descomposición regular admite la siguiente descomposición:

$$\mathbb{C}[G] \cong W_1^{\oplus n_1} \oplus \cdots \oplus W_r^{\oplus n_r}.$$

Pero $\dim(W_i^{\oplus n_i}) = n_i^2 = \dim \operatorname{End}(W_i)$ donde $\operatorname{End}(W_i)$ es el espacio vectorial de endomorfismos lineales $W_i \to W_i$. Esto sugiere que podemos pensar en una descomposición más natural en la forma

$$\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{End}(W_i).$$

En efecto, escribamos $\rho_i : G \to \operatorname{GL}(W_i)$ para la representación de G en W_i. Por linealidad este homomorfismo de grupos se extiende a un homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $\widetilde{\rho}_i : \mathbb{C}[G] \to \operatorname{End}(W_i)$ de modo que

$$\widetilde{\rho}_i \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) = \sum_{g \in G} a_g \rho_i(g).$$

Esta familia de homomorfismos de álgebras inducen un homomorfimo de $\mathbb{C}$-álgebras

$$\varphi : \mathbb{C}[G] \to \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{End}(W_i),$$

dado por

$$\varphi(g)(w_1, \dots, w_n) = (\rho_1(g)(w_1), \dots, \rho_r(g)(w_r)), \qquad \text{para todo } g \in G, w_i \in W_i.$$

Teorema 3.30 (Wedderburn-Artin para el álgebra de grupo)**.** *El homomorfismo de álgebras φ construido arriba es un isomorfismo.*

Demostración. Sea $x = \sum_{g \in G} a_g g \in \operatorname{Ker}(\varphi)$, entonces para cada $1 \leq i \leq r$, sea $w_i \in W_i$, de modo que tenemos

$$\sum_{g \in G} a_g g w_i = 0, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Esto implica que $\sum_{g \in G} a_g g \mid_{W_i} = 0$ para todo i y por ende que $x = 0$. Así φ es inyectiva. Dado que

$$\dim \mathbb{C}[G] = |G| = \sum_{i=1}^{r} n_i^2 = \dim \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{End}(W_i),$$

se sigue que φ es un isomorfismo. ■

A continuación veremos que, en cierto sentido, el isomorfismo φ puede pensarse como la transformada de Fourier sobre $\mathbb{C}[G]$. Previo a ello, haremos algunas consideraciones:

Sea $\mathbb{C}^G$ el espacio vectorial de todas las funciones $G \to \mathbb{C}$. Claramente $\mathbb{C}^G$ es una $\mathbb{C}$-álgebra con la suma y producto usual de funciones. Sin embargo existe otro producto sobre $\mathbb{C}^G$:

Definición. Dadas dos funciones $u, v : G \to \mathbb{C}$, se define su *convolución* como

$$(u * v)(g) = \sum_{h \in G} u(h) v(h^{-1} g), \qquad g \in G.$$

Ejercicio 3.31. Pruebe que $\mathbb{C}^G$ es una $\mathbb{C}$-álgebra asociativa cuando se la equipa con el producto de convolución.

En lo que sigue, consideraremos a $\mathbb{C}^G$ como una $\mathbb{C}$-álgebra con el producto de convolución.

Lema 3.32. *La aplicación $\psi : \mathbb{C}^G \to \mathbb{C}[G]$ definida por*

$$\psi(u) = \sum_{g \in G} u(g)g$$

es un isomorfismo de álgebras.

Demostración. ψ es $\mathbb{C}$-lineal y sobreyectiva por definición y claramente

$$\dim \mathbb{C}[G] = |G| = \dim \mathbb{C}^G$$

(una base de $\mathbb{C}^G$ está dada por las funciones u_g que toman el valor 1 sobre g y 0 sobre cualquier otro elemento de G). Por ende, basta probar que ψ es un morfismo de álgebras. Sean $u, v : G \to \mathbb{C}$ funciones, entonces

$$\begin{aligned}
\psi(u * v) &= \sum_{g \in G} (u * v)(g)g \\
&= \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} u(h)v(h^{-1}g)g \\
&= \sum_{g \in G} \left(\sum_{hh'=g} u(h)v(h') \right) g \\
&= \left(\sum_{g \in G} u(g)g \right) \left(\sum_{g \in G} v(g)g \right) \\
&= \psi(u)\psi(v).
\end{aligned}$$

■

Definición. Sea $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación de G y $u : G \to \mathbb{C}$ una función. La *transformada de Fourier* de u relativa a ρ es

$$\widehat{u}(\rho) = \sum_{g \in G} u(g)\rho(g) \in \mathrm{End}(V).$$

Teorema 3.33. *Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación de G y sean $\rho_i : G \to GL(W_i)$ las representaciones irreducibles de G, con $1 \leq i \leq r$. Entonces*

(i) *Para todo par de funciones $u, v : G \to \mathbb{C}$ se tiene que*

$$\widehat{u * v}(\rho) = \widehat{u}(\rho)\widehat{v}(\rho).$$

(ii) **Fórmula de inversión de Fourier.** *Si $u : G \to \mathbb{C}$ es una función, entonces*

$$u(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{r} \dim(W_i)\mathrm{Tr}(\rho_i(g^{-1})\widehat{u}(\rho_i)).$$

(iii) **Fórmula de Plancherel.** *Sean* $u, v : G \to \mathbb{C}$ *funciones, entonces*

$$\sum_{g \in G} u(g)v(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{r} \dim(W_i) \mathrm{Tr}(\widehat{u}(\rho)\widehat{v}(\rho)).$$

Demostración. La demostración se deja como ejercicio. ■

Ejercicio 3.34. Usando la fórmula de inversión de Fourier, encuentre explícitamente la inversa del isomorfismo $\varphi : \mathbb{C}[G] \to \bigoplus \mathrm{End}(W_i)$. Explique después por qué φ puede interpretarse como la transformada de Fourier.