Lección nº 4 EPN, Octubre 2020

4. Tablas de caracteres; Ejemplos; Teorema de Frobenius

4.1. Tablas de caracteres

Dado un grupo finito G, recordemos que el carácter χ_V de una representación V de G es una función de clases, por ende basta conocer sus valores sobre un representante de cada clase de conjugación de G. Supongamos que G tiene r clases de conjugación $C_1, \ldots, C_r$ y sea g_i un representante de la clase C_i. Recordemos además que el número de caracteres irreducibles de un grupo G está dado por r. Denotaremos por $W_1, \ldots, W_r$ a las representaciones irreducibles (módulo isomorfismo) de G.

Definición. La *tabla de caracteres* del grupo G es la matriz

$$(\chi_{W_i}(g_j))_{1\leq i,j\leq n}.$$

Siendo fieles al nombre *tabla* de caracteres, para escribir una tabla de caracteres lo haremos en forma de una tabla, donde las etiquetas de las columnas serán los representantes de las clases de conjugación y las etiquetas de las filas serán los nombres de los caracteres. *Siempre* escribiremos los valores del carácter de la representación trivial en la primera fila. Además agregaremos una fila de etiquetas sobre la fila que contiene a los representantes de las clases de conjugación, indicando el número de elementos en cada clase de conjugación.

Ejemplo 4.1. Consideremos el grupo simétrico S_3. Ya conocemos al menos dos de sus subrepresentaciones irreducibles, la subrepresentación

$$W = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 = z_2 = z_3\} \cong \mathbf{1}$$

y

$$V = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + z_2 + z_3 = 0\}.$$

La primera es de dimensión 1 y la segunda es de dimensión 2 y ambas son subrepresentaciones de $\mathbb{C}^3$ tales que $\mathbb{C}^3 = W \oplus V$. Además, tenemos la representación signo: $\mathrm{sign} : S_3 \to \mathbb{C}^*$ que a cada $\sigma \in S_3$ le asigna el signo de σ y que denotaremos por U.

Ahora, notemos que $|S_3| = 6$ y que S_3 tiene 3 clases de conjugación:

- La clase C_1 que consta solamente del elemento identidad;
- La clase C_2 que consta de todas las transposiciones, es decir $C_2 = \{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}$;
- La clase C_3 que consta de los 3-ciclos, es decir, $C_3 = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$.

En la representación trivial, todos los elementos de S_3 actúan por la identidad en $\mathbb{C}$ y así

$$\chi_{\mathbf{1}}(\sigma) = 1, \qquad \text{para todo } \sigma \in S_3.$$

Ahora, observemos que los elementos $\sigma = (1\ 2\ 3)$ y $\tau = (1\ 2)$ están representados en la base

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

de $\mathbb{C}^3$ por las matrices

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad [\tau] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de modo que

$$\chi_{\mathbb{C}^3}(\sigma) = 0 \qquad \text{y} \qquad \chi_{\mathbb{C}^3}(\tau) = 1.$$

Con esto, dado que $\chi_{\mathbb{C}^3} = \chi_V + \chi_W$ y $\chi_W = \chi_{\mathbf{1}}$ obtenemos que

$$\chi_V(1) = 2, \qquad \chi_V(\sigma) = -1, \qquad \text{y} \qquad \chi_V(\tau) = 0.$$

También, de manera trivial, tenemos que

$$\chi_U(1) = 1, \qquad \chi_U(\sigma) = 1, \qquad \text{y} \qquad \chi_U(\tau) = -1.$$

Dado que $\chi_U \neq \chi_{\mathbf{1}}$ se sigue que las representaciones de dimensión 1 dadas por U y $\mathbf{1}$ no son isomorfas. Como S_3 tiene tres clases de conjugación, tenemos que estas tres representaciones son todas las representaciones irreducibles de S_3 (módulo isomorfismo), y tenemos la siguiente tabla de caracteresp para S_3:

	1	3	2
	1	(1 2)	(1 2 3)
$\chi_{\mathbf{1}}$	1	1	1
χ_U	1	-1	1
χ_V	2	0	-1

4.2. Grupos abelianos y grupos cíclicos

Los grupos más sencillos que podemos estudiar (y que conocemos mejor) son los grupos abelianos finitos (en general, finitamente generados). Su teoría de representaciones resulta ser muy sencilla:

Proposición 4.2. *Sea A un grupo abeliano finito. Entonces toda representación irreducible de A es de dimensión* 1.

Demostración. Como A es abeliano, A tiene precisamente $|A|$ clases de conjugación (pues $bab^{-1} = a$ para todo $a, b \in A$) y por ende tiene $|A|$ representaciones irreducibles (módulo isomorfismo). La representación regular $R = \mathbb{C}[A]$ de A es de dimensión $|A|$ y contiene a cada representación irreducible W de A exactamente $\dim(W)$ veces. Sean $W_1, \dots, W_{|A|}$ las representaciones irreducibles de A, y sea $n_i = \dim(W_i)$, entonces tenemos que

$$|A| = \dim(R) = \sum_{i=1}^{|A|} n_i^2,$$

y como cada $n_i \geq 1$, esto implica que $n_i = 1$ para todo $i = 1, \dots, |A|$. ■

Los ejemplos prototípicos de grupos abelianos son los grupos cíclicos. Denotemos por $C_n = \langle \sigma \mid \sigma^n = 1 \rangle$ al grupo cíclico de orden n. Sea ζ_n una raíz n-ésima primitiva de la unidad, es decir, $\zeta_n = e^{2k\pi i/n}$ para algún entero k relativamente primo a n. Para cada $k = 0, 1, \ldots, n-1$ definimos la representación $\rho_k : C_n \to \mathrm{GL}(W_k)$, donde $W_k = \mathbb{C}$ para todo k mediante

$$\rho_k(\sigma) = \zeta_n^k.$$

Por definición tenemos que $\chi_{W_k}(\sigma) = \zeta_n^k$ y por ende estas representaciones son dos a dos disjuntas y por ende forman una familia completa de representaciones irreducibles de C_n. Con esto, obtenemos la siguiente tabla de caracteres para C_n:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
 & 1 & \sigma & \sigma^2 & \cdots & \sigma^{n-1} \\
\hline
\chi_{W_0} & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
\chi_{W_1} & 1 & \zeta_n & \zeta_n^2 & \cdots & \zeta_n^{n-1} \\
\chi_{W_2} & 1 & \zeta_n^2 & \zeta_n^4 & \cdots & \zeta_n^{2(n-1)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\chi_{W_{n-1}} & 1 & \zeta_n^{n-1} & \zeta_n^{2(n-1)} & \cdots & \zeta_n^{(n-1)^2}
\end{array}$$

Ejercicio 4.3. (a) Muestre que la entrada (i, j)-ésima de la tabla de caracteres de C_n es $\zeta_n^{(i-1)(j-1)}$.

(b) Muestre que si elegimos una raíz primitiva de la unidad distinta ζ_n', las representaciones W_k' definidas por $\sigma \mapsto (\zeta_n')^k$ son las mismas que las representaciones W_k pero en orden distinto, es decir, que existe una permutación $\eta \in S_n$ tal que $W_k' = W_{\eta(k)}$ para todo k.

(c) Escriba explícitamente la tabla de caracteres para C_2, C_3 y C_4.

(d) Escriba la tabla de caracteres para el grupo alternante A_3.

Es un resultado muy bien conocido que todo grupo abeliano finito es una suma directa (o producto directo, que en este caso es lo mismo) de grupos cíclicos finitos: Para todo grupo abeliano finito A, existe una única familia de enteros positivos $n_1, \ldots, n_k$ tales que $n_i \mid n_{i+1}$ para $i = 1, \ldots, k-1$ (llamados *factores invariantes*, igual que los polinomios divisores fundamentales que aparecen en el estudio de las formas canónicas racional y de Jordan. De hecho, ambas cosas son casos particulares de una teoría general, la teoría de módulos finitamente generados sobre dominios de ideales principales) y tales que

$$A = C_{n_1} \times \cdots \times C_{n_k},$$

o, en notación aditiva,

$$A = \mathbb{Z}/n_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/n_k.$$

Este es el famoso *teorema de estructura de grupos abelianos finitos* y puede ser encontrado en cualquier libro decente de álgebra, por ejemplo en *Algebra* de Serge Lang (Teorema 8.2, Capítulo 1). Este es un caso particular del *teorema de estructura de grupos abelianos finitamente generados* que a su vez es un caso particular del *teorema de estructura de módulos finitamente generados sobre un PID.*

Este teorema permite determinar la teoría de representaciones de un grupo abeliano por completo:

Sean G, H dos grupos (no necesariamente abelianos) y sea $G \times H$ su producto directo. Si $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\eta : H \to \mathrm{GL}(W)$ son representaciones, entonces definimos su *producto* *tensorial*[1] $\rho \otimes \eta : G \times H \to \mathrm{GL}(V \otimes W)$ como la representación

$$(\rho \otimes \eta)(g,h)(v \otimes w) = \rho(g)(v) \otimes \eta(h)(w), \qquad v \in V, w \in W, g \in G, h \in H.$$

Proposición 4.4. *Sean $\rho : G \to GL(V)$ y $\eta : H \to GL(W)$ representaciones de G y H, respectivamente. Entonces*

(i) *El carácter de $\rho \otimes \eta$ está dado por*

$$\chi_{V\otimes W}(g,h) = \chi_V(g)\chi_W(h), \qquad \text{para todo } g \in G, h \in H.$$

(ii) *Si V y W son irreducibles, entonces $V \otimes W$ es una representación irreducible de $G \times H$.*

(iii) *Si $\kappa : G \times H \to GL(U)$ es una representación irreducible de $G \times H$, entonces existen representaciones irreducibles $\rho : G \to GL(V)$ y $\eta : H \to GL(W)$ de G y H, respectivamente, tales que $(\kappa, U) \cong (\rho \otimes \eta, V \otimes W)$.*

Demostración. (i) es un cálculo directo. Para (ii) observe que si V y W son irreducibles, entonces $(\chi_V \mid \chi_V)_G = 1$ y $(\chi_W \mid \chi_W)_H = 1$ y tenemos que

$$(\chi_{V\otimes W} \mid \chi_{V\otimes W})_{G\times H} = (\chi_V \mid \chi_V)_G(\chi_W \mid \chi_W)_H = 1$$

de modo que $V \otimes W$ es una representación irreducible de $G \times H$.

Finalmente si G tiene r clases de conjugación y H tiene s clases de conjugación, entonces $G \times H$ tiene rs clases de conjugación. Dado que existen rs caracteres irreducibles de la forma $\chi_{V\otimes W}$ dos a dos distintos, entonces estos forman una familia completa de caracteres irreducibles y por ende toda representación irreducible de $G \times H$ es del tipo mostrado en (ii). Esto prueba (iii). ■

Ejercicio 4.5. Si la anterior demostración fue oscura para usted, aclárela completando todos los detalles de la misma.

Por el teorema anterior, dado un grupo abeliano A, podemos descomponerlo en el producto de grupos cíclicos. Ya que conocemos todas las representaciones irreducibles de grupos cíclicos, entonces calculando los produtos tensoriales, podemos determinar todas las representaciones irreducibles de A y sus caracteres.

Ejercicio 4.6. (a) Calcule la tabla de caracteres del grupo de 4 de Klein, V_4.

(b) Sean p y q dos enteros positivos coprimos. Calcule de dos maneras distintas la tabla de caracteres de $\mathbb{C}_{pq}$: directamente y usando el isomorfismo $C_{pq} \cong C_p \times C_q$.

4.3. Grupos dihedros

Sea n un número entero positivo, $n \geq 3$. Denotamos por D_{2n} al grupo dihedro de orden $2n$ (algunos autores lo denotan por D_n), es decir, al grupo

$$D_{2n} = \langle r, s \mid r^n = s^2 = 1,\ srs = r^{-1} \rangle.$$

[1] No debe confundir esto con la definición de producto tensorial de dos representaciones de G. Este es el producto tensorial de dos representaciones, una de G y otra de H.

Recordemos que una lista completa de los elementos de D_{2n} está dada por

$$D_{2n} = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^{-2}, \ldots, sr^{n-1}\}$$

y que todos los elementos sr^k son reflexiones, es decir, $(sr^k)^2 = 1$ (verifíquelo) y por ende, en particular $s^{-1} = s$. Además, se verifican las siguientes igualdades:

$$sr^k s = r^{-k}, \qquad s(sr^k)s = sr^{-k}s, \qquad rr^k r^{-1} = r^k, \qquad \text{y} \qquad r(sr^k)r = sr^{k-2}.$$

Con esto podemos probar:

Ejercicio 4.7. Pruebe que el grupo dihedro D_{2n} tiene las siguientes clases de conjugación:

(i) Si n es par:

- 2 clases de un sólo elemento: $\{1\}$ y $\{r^{n/2}\}$;
- $\frac{n}{2} - 1$ clases de dos elementos: $\{r, r^{-1}\}, \{r^2, r^{-2}\}, \ldots, \{r^{\frac{n}{2}-1}, r^{\frac{n}{2}+1}\}$;
- 2 clases de $\frac{n}{2}$ elementos: $\{sr^{2j} \mid 0 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1\}$ y $\{sr^{2j+1} \mid 0 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1\}$.

(ii) Si n es impar:

- Una clase de un sólo elemento: $\{1\}$;
- $\frac{n-1}{2}$ clases de dos elementos: $\{r, r^{-1}\}, \{r^2, r^{-2}\}, \ldots, \{r^{\frac{n-1}{2}}, r^{\frac{n+1}{2}}\}$;
- Una clase de n elementos (las reflexiones): $\{s, sr, \ldots, sr^{n-1}\}$.

Dado el ejercicio anterior, vemos que es necesario considerar separadamente los casos cuando n es par o impar para poder estudiar sus representaciones y caracteres.

Representaciones y caracteres irreducibles de D_{2n} cuando n es par: En este caso, existen $\frac{n}{2} + 3$ representaciones irreducibles. Consideremos las siguientes representaciones: $\chi_j : D_{2n} \to \mathbb{C}^*$ dadas por

$$\chi_0(r) = \chi_0(s) = 1, \qquad \chi_1(r) = -\chi_1(s) = 1, \qquad \chi_2(r) = -\chi_2(s) = -1, \qquad \chi_3(r) = \chi_3(s) = -1.$$

Es fácil verificar (por ejemplo, usando el teorema de von Dyck) que χ_j están bien definidas y que al considerar $\chi_j : D_{2n} \to \mathbb{C}$, entonces χ_j es su propio carácter. Estas representaciones son dos a dos disjuntas pues sus caracteres son dos a dos distintos. Para cada $j = 0, \ldots, n-1$ definimos representaciones $\rho_j : D_{2n} \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^2)$ mediante

$$\rho_j(r^k) = \begin{pmatrix} \zeta_n^{jk} & 0 \\ 0 & \zeta_n^{-jk} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \rho_j(sr^k) = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_n^{-jk} \\ \zeta_n^{jk} & 0 \end{pmatrix},$$

donde $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad.

Ejercicio 4.8. Denotamos por $W_j = \mathbb{C}^2$ al espacio de representación de la representación ρ_j.

(a) Calcule los caracteres de las representaciones ρ_j para obtener

$$\chi_{W_j}(r^k) = \zeta_n^{jk} + \zeta_n^{jk} = 2\cos\left(\frac{2\pi jk}{n}\right), \qquad \chi_{W_j}(sr^k) = 0.$$

(b) Pruebe que las representaciones ρ_j y ρ_{n-j} son isomorfas.

(c) Pruebe que las representaciones ρ_0 y $\rho_{n/2}$ *no* son irreducibles. *Ayuda: pruebe que sus caracteres verifican*

$$\chi_{W_0} = \chi_0 + \chi_2 \qquad \text{y} \qquad \chi_{W_{n/2}} = \chi_2 + \chi_3.$$

(d) Pruebe que las representaciones ρ_j con $1 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1$ son irreducibles.

(e) Concluya que la familia de representaciones $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi_3$ y ρ_i, $(1 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1)$ es la colección de todas las representaciones irreducibles de D_{2n}.

(f) El subgrupo $C_n = \langle r \rangle$ es un grupo cíclico de orden n. Sea U_j la representación dada por $r \mapsto \zeta_n^j$. Pruebe que $W_j = \mathrm{Ind}_{C_n}^{D_{2n}} U_j$. *Ayuda: Use la fórmula para los caracteres inducidos.*

Representaciones y caracteres irreducibles de D_{2n} cuando n es impar: En este caso, existen $\frac{n+3}{2}$ representaciones irreducibles.

Ejercicio 4.9. Pruebe que en este caso

(a) χ_0 y χ_1 son representaciones de D_{2n}.

(b) Las representaciones ρ_j definidas anteriormente verifican que ρ_0 no es irreducible y que ρ_j y ρ_{n-j} son isomorfas.

(c) Las representaciones ρ_j para $1 \leq j \leq \frac{n-1}{2}$ son irreducibles.

(d) Las representaciones χ_0, χ_1 y ρ_j, $(1 \leq j \leq \frac{n-1}{2})$ son todas las representaciones irreducibles de D_{2n}.

Ejemplo 4.10. La tabla de caracteres del grupo D_6 es

	1	2	3
	1	r	s
χ_0	1	1	1
χ_1	1	1	-1
χ_{W_1}	2	$\omega + \omega^2$	0

donde $\omega = e^{2\pi i/3}$.

Ejemplo 4.11. La tabla de caracteres del grupo D_8 es

	1	1	2	2	2
	1	r^2	r	s	sr
χ_0	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	1	-1	-1
χ_2	1	1	-1	1	1
χ_3	1	1	-1	-1	-1
χ_{W_1}	2	-2	0	0	0

4.4. Grupos alternante A_4 y simétrico S_4

Sabemos que $|A_4| = 12$ y $|S_4| = 24$. Además $A_4 \trianglelefteq S_4$.

Ejercicio 4.12. Pruebe que A_4 tiene 4 clases de conjugación:

- $C_1 = \{1\}$;
- $C_2 = \{(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$;
- $C_3 = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 4), (2\ 4\ 3), (1\ 4\ 2)\}$; y
- $C_4 = \{(1\ 3\ 2), (2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 3)\}$.

Más aún, escribiendo $\sigma_1 = (1\ 2)(3\ 4)$, $\sigma_2 = (1\ 3)(2\ 4)$, $\sigma_3 = (1\ 4)(2\ 3)$ y $\sigma = (1\ 2\ 3)$ pruebe que $C_3 = \{\sigma\sigma_1, \sigma\sigma_2, \sigma\sigma_3\}$ y $C_4 = \{\sigma^2\sigma_1, \sigma^2\sigma_2, \sigma^2\sigma_3\}$.

Para esto, puede resultar útil probar primero las relaciones

$$\sigma\sigma_1\sigma^{-1} = \sigma_3, \qquad \sigma\sigma_2\sigma^{-1} = \sigma_1, \qquad \text{y} \qquad \sigma\sigma_3\sigma^{-1} = \sigma_2.$$

Ejercicio 4.13. Mantenemos la notación del ejercicio anterior.

(a) Pruebe que $C_3 = \{1, \sigma, \sigma^3\}$ es un subgrupo cíclico de A_4 y que $H = \{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ es un subgrupo normal de A_4. Más aún, pruebe que $A_4 = H \rtimes C_3$ (es decir, que $A_4 = HC_3$ y que $H \cap C_3 = \{1\}$ o, equivalentemente, que todo elemento de A_4 puede escribirse de manera única en la forma uv con $u \in C_3$, $v \in H$).

(b) Sea $f : C_3 \to \mathbb{C}^*$ un homomorfismo de grupos. Demuestre que existe una única extensión a un homomorfismo $f' : A_4 \to \mathbb{C}^*$ descrita del siguiente modo: Si $\sigma \in A_4$, podemos escribir $\sigma = uv$ con $u \in C_3$ y $v \in H$ únicamente determinados por σ y con esto $f'(\sigma) = f(u)$.

Dado que el subgrupo C_3 es un grupo cíclico de orden 3, posee tres caracteres irreducibles:

$$\chi_0(\sigma^k) = 1, \qquad \chi_1(\sigma^k) = \omega^k \qquad \text{y} \qquad \chi_2(\sigma^k) = \omega^{2k}$$

para $k \in \{0, 1, 2\}$, donde $\omega = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Por el ejercicio anterior estos caracteres pueden extenderse a caracteres de A_4, denotados con los mismos nombres,

$$\chi_0(\sigma^k\sigma_j) = 1, \qquad \chi_1(\sigma^k\sigma_j) = \omega^k \qquad \text{y} \qquad \chi_2(\sigma^k\sigma_j) = \omega^{2k}$$

para todo $k \in \{0, 1, 2\}$ y $j \in \{0, 1, 2, 3\}$, donde $\sigma_0 := 1$.

Como A_4 tiene solamente 4 clases de conjugación, sólo hace falta calcular un carácter irreducible, al que denotaremos por χ_3. Si este carácter proviene de una representación irreducible W, entonces debemos tener

$$12 = |A_4| = 1 + 1 + 1 + \dim(W_i)^2,$$

de donde $\dim(W_3) = 3$. Lo interesante es que podemos calcular el carácter restante sin conocer la representación W_3: Usando la relación

$$\sum_{j=0}^{3} n_j \chi_j(g) = 0$$

para todo $g \in A_1$, $g \neq 1$, donde n_j es la dimensión de la representación asociada al carácter χ_j, tenemos que

$$\chi_3(\sigma) = -\frac{1 + \omega + \omega^2}{3} = 0, \qquad \chi_3(\sigma^2) = -\frac{1 + \omega^2 + \omega}{3} = 0, \qquad \chi_3(\sigma_1) = -\frac{3}{3} = -1.$$

Con esto, se obtiene la siguiente tabla de caracteres:

	1	3	4	4
	1	σ_1	σ	σ^2
χ_0	1	1	1	1
χ_1	1	1	ω	ω^2
χ_2	1	1	ω^2	ω
χ_3	3	-1	0	0

Ejercicio 4.14. Considere la representación de S_4 en $\mathbb{C}^4$ dada por

$$\sigma(z_1, z_2, z_3, z_4) = \left(z_{\sigma^{-1}(1)}, z_{\sigma^{-1}(2)}, z_{\sigma^{-1}(3)}, z_{\sigma^{-1}(4)}\right).$$

Sea $V \subseteq \mathbb{C}^4$ la subrepresentación

$$V = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 \mid z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0\}.$$

Finalmente, sea $W = \mathrm{Res}_{A_4}^{S_4}(V)$. Pruebe que W es la única (módulo isomorfismo) representación irreducible de A_4 de dimensión 3.

Ejercicio 4.15. (a) Sea V una representación de G y $H \leq G$ un subgrupo. Pruebe que si $\mathrm{Res}_H^G(V)$ es una representación irreducible de H, entonces V es una representación irreducible de G.

(b) Concluya de lo anterior que la representación V de S_4, construida en el ejercicio anterior, es irreducible.

Ejercicio 4.16. Pruebe que S_4 tiene las siguientes clases de conjugación:

- El único 1-ciclo: 1;
- Seis transposiciones: (1 2), (1 3), (1 4), (2 3), (2 4), (3 4);
- Ocho ciclos de largo 3: (1 2 3), (1 3 2), (1 2 4), (1 4 2), (1 3 4), (1 4 3), (2 2 4), (1 4 3);
- Tres productos de 2-ciclos disjuntos: $\sigma_1 = (1\ 2)(3\ 4)$, $\sigma_2 = (1\ 3)(2\ 4)$, $\sigma_3 = (1\ 4)(2\ 3)$;
- Seis ciclos de largo 4: (1 2 3 4), (1 2 4 3), (1 3 2 4), (1 3 4 2), (1 4 2 3), (1 4 3 2).

Ejercicio 4.17. Sea $H = \{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Pruebe que H es un subgrupo normal de S_4. Sea además

$$K = \{\sigma \in S_4 \mid \sigma(4) = 4\}.$$

Pruebe que K es un subgrupo de S_4, que $S_4 = H \rtimes K$ y que $K \cong S_3$.

Sabemos que S_3 posee dos representaciones irreducibles $\chi_0' : S_3 \to \mathrm{GL}(W_0)$ y $\chi_1' : S_3 \to \mathrm{GL}(W_1)$ de dimensión 1 (la representación trivial y la representación signo) y una representación irreducible W de dimensión 2 (a la que anteriormente llamábamos V), dada por

$$W = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + z_2 + z_3 = 0\}.$$

Compuestas con el isomorfismo $K \to S_3$ estas pueden considerarse como representaciones irreducibles de K y pueden extenderse a representaciones de S_4 del siguiente modo: Todo elemento $\sigma \in S_4$ se escribe de manera única en la forma $\sigma = uv$ con $u \in K$, $v \in H$, entonces la extensión ρ de ρ' está dada por

$$\rho(\sigma) = \rho'(u).$$

De este modo obtenemos cuatro representaciones irreducibles de S_4: La representación V del Ejercicio 4.14 y las tres anteriormente descritas. Sin embargo, como A_4 tiene cinco clases de conjugación, hace falta una representación irreducible más, a la que llamamos U. Denotemos a su carácter por χ_U, entonces podemos calcularlo conociendo los otros cuatro caracteres irreducibles y obtener la siguiente tabla de caracteres:

	1	6	8	3	6
	1	(1 2)	(1 2 3)	(1 2)(3 4)	(1 2 3 4)
χ_0	1	1	1	1	1
χ_1	1	-1	1	1	-1
χ_W	2	0	2	-1	0
χ_V	3	1	-1	0	1
χ_U	3	-1	-1	0	-1

De esta tabla de caracteres se ve que $\chi_U = \chi_1\chi_V$, lo que implica que $U = W_1 \otimes V$, y de este modo hemos obtenido también todas las representaciones irreducibles de S_4.

4.5. Teorema de Frobenius

Finalizamos esta exposición con una presentación de un resultado bellísimo de la teoría de grupos, cuya demostración depende fuertemente (al menos hasta el día de hoy) de la teoría de caracteres.

Definición. Sea G un grupo y H un subgrupo propio no trivial (i.e. $1 < H < G$). Decimos que H es un *subgrupo de Frobenius* o un *complemento de Frobenius* si

$$H \cap gHg^{-1} = 1, \qquad \text{para todo } g \in G - H.$$

El grupo G se dice un *grupo de Frobenius* si posee un subgrupo de Frobenius. Finalmente, definimos

$$N' = \left(G - \bigcup_{g \in G} gHg^{-1} \right)$$

y $N = N' \cup \{1\}$. El conjunto N se llama el *núcleo de Frobenius* de G.

Observaciones. (1) Note que N' es el conjunto de todos los elementos de G que *no* son conjugados a ningún elemento de H.

(2) Un subgrupo H de un grupo G se dice un *subgrupo malnormal* si $H \cap gHg^{-1} = 1$ para todo $g \in G - H$. Entonces un grupo de Frobenius es un grupo que posee un subgrupo malnormal propio no trivial.

En la bibliografía suele darse otra definición de grupo de Frobenius, que es equivalente a la que hemos dado aquí.

Proposición 4.18. *Sea G un grupo finito que actúa transitivamente sobre un conjunto X con $|X| > 1$ y tal que verifica*

(i) *Para cada $g \in G$, $g \neq 1$, el elemento g fija a lo más un punto de X. Es decir, $|\{x \in X \mid gx = x\}| \leq 1$.*

(ii) *Existe un elemento $x_0 \in X$ cuyo estabilizador es no trivial, es decir:* $\mathrm{Stab}_G(x_0) \neq 1$.

Entonces, si $H = \mathrm{Stab}_G(x_0)$, tenemos que H es un subgrupo de Frobenius y por ende G

es un grupo de Frobenius.
Recíprocamente, si G es un grupo de Frobenius, la acción transitiva de G en G/H verifica (i) y (ii), con $x_0 = H \in G/H$.

Demostración. Por (ii) tenemos que $1 < H$. Si $H = G$, entonces $gx_0 = x_0$ para todo $g \in G$, lo que es absurdo pues la acción de G en X es transitiva y $|X| > 1$. Así $1 < H < G$. Sea ahora $g \in G - H$, entonces $gx_0 \neq x_0$. Sea $h \in H \cap gHg^{-1}$, entonces $h \in H$ y existe $h' \in H$ tal que $h = gh'g^{-1}$. Entonces tenemos que

$$x_0 = hx_0 = gh'g^{-1}x_0,$$

de donde $h'(g^{-1}x_0) = g^{-1}x_0$, pero $g^{-1}x_0 \neq x_0$ y (i) implica que $h' = 1$, de donde $h = gg^{-1} = 1$. Por lo tanto $H \cap gHg^{-1} = 1$ para todo $g \in G - H$, lo que prueba que H es un subgrupo de Frobenius y que G es un grupo de Frobenius.

Para el recíproco, notemos que la acción de G en G/H es transitiva y que como $H < G$, se tiene que $|G/H| > 1$. Para cada $g \in G$ tenemos que

$$\mathrm{Stab}_G(gH) = \{t \in G \mid tgH = gH\} = \{t \in G \mid g^{-1}tg \in H\} = gHg^{-1}.$$

En particular $\mathrm{Stab}_G(H) = H \neq 1$, por lo que se verifica (ii). Ahora, si $g \in G$ y $g \neq 1$ es tal que $g(tH) = tH$ y $g(sH) = sH$ para ciertos $t, s \in G$, tenemos que $g \in \mathrm{Stab}_G(tH)$ y $g \in \mathrm{Stab}_G(sH)$, de donde

$$1 \neq t^{-1}gt \in H \cap t^{-1}sHs^{-1}t = H \cap (t^{-1}s)H(t^{-1}s)^{-1},$$

lo que, como H es un subgrupo de Frobenius, implica que $t^{-1}s \in H$, es decir, $tH = sH$. Por ende se cumple (i). ■

Nótese que de la definición del núcleo de Frobenius no es para nada claro que N tenga algúna estructura. En primera instancia es simplemente un subconjunto de G que contiene a 1. Sin embargo, el siguiente (excepcional) resultado nos da considerablemente más información:

Teorema 4.19 (Frobenius)**.** *Sea G un grupo de Frobenius, H un subgrupo de Frobenius y N el núcleo de Frobenius. Entonces N es un subgrupo normal de G y $G = N \rtimes H$.*

Note que en el enunciado del teorema no existe ninguna referencia a la teoría de caracteres. A continuación presentaremos una serie de resultados previos con miras a demostrar este teorema.

Lema 4.20. *Sea G un grupo finito arbitrario (no necesariamente de Frobenius) y $\rho : G \to GL(V)$ una representación irreducible de G, con $\dim(V) = n$. Entonces para todo $g \in G$ se tiene que $|\chi_V(g)| \leq n$ y la igualdad se cumple si y sólo si $\rho(g)$ es una homotecia. En particular $\chi_V(g) = n$ si y sólo si $\rho(g) = 1$.*

Demostración. Dado que $g^m = 1$ para algún m, entonces los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de $\rho(g)$ verifican $\lambda_j^m = 1$ y en particular, $|\lambda_j| = 1$. Se sigue que

$$|\chi_V(g)| = \left| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| = n. \tag{1}$$

Si $\rho(g)$ es una homotecia, entonces $\rho(g) = \lambda 1$ para cierto $\lambda \in \mathbb{C}$ y $|\lambda| = 1$, de donde claramente $|\chi_V(g)| = n|\lambda| = n$. Recíprocamente, supongamos que $|\chi_V(g)| = n$, entonces la desigualdad en

(1) debe ser una igualdad, es decir,

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\right| = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|.$$

Es bien sabido (y si no lo es para usted, demuéstrelo) que esto implica que existen números reales $a_1, \ldots, a_{n-1}$ tales que

$$\lambda_j = a_j \lambda_n, \qquad 1 \leq j \leq n-1$$

y tomando módulos, vemos que $|a_j| = 1$. Se sigue que necesariamente $a_j = 1$ para todo j (caso contrario) la desigualdad en (1) sería estricta, y por lo tanto $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$, lo que implica que $\rho(g)$ es una homotecia.

Finalmente, notemos que $\chi_V(g) = n$ si y sólo si $\rho(g) = \lambda 1$ para cierto λ con $n\lambda = n$, lo que equivale a que $\lambda = 1$. ∎

Lema 4.21. *Sea G un grupo finito arbitrario (no necesariamente de Frobenius) y H un subgrupo. Sea P la representación de permutación asociada a la acción de G sobre G/H. Entonces $\chi_P = \mathrm{Ind}_H^G(\chi_{\mathbf{1}})$ y además $\psi := \chi_P - 1$ es un carácter de G.*

Demostración. Por el Ejercicio 2.17 sabemos que si $g \in G$, entonces $\chi_P(g)$ es el número de clases $\sigma \in G/H$ fijadas por g, es decir

$$\chi_P(g) = |\{\sigma \in G/H \mid g\sigma = \sigma\}| = \frac{1}{|H|}|\{t \in G \mid g \in tHt^{-1}\}| = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{t \in G \\ t^{-1}gt \in H}} 1 = \mathrm{Ind}_H^G(\chi_{\mathbf{1}})(g).$$

Sea ahora $(e_\sigma)_{\sigma \in G/H}$ la base de V tal que $ge_\sigma = e_{g\sigma}$ para todo $g \in G$ y $\sigma \in G/H$. Sea

$$W_0 = \mathbb{C} \sum_{\sigma \in G/H} e_\sigma.$$

Entonces, como la acción de G en G/H es transitiva, tenemos que $g(W_0) = W_0$ para todo $g \in G$ y por ende W_0 es una subrepresentación de P. Luego, existe una representación W de G tal que $P = W_0 \oplus W$, y tenemos entonces que

$$\chi_P = \chi_{W_0} + \chi_W,$$

pero claramente W_0 es (isomorfa a) la representación trivial $\mathbf{1}$ por lo tanto

$$\chi_W = \chi_P - \chi_{\mathbf{1}} = \psi,$$

de donde ψ es un carácter. ∎

Ejercicio 4.22. Mantenemos la notación como en la demostración anterior. Use la reciprocidad de Frobenius (clásica) para probar que la representación W de G es irreducible si y sólo si $\mathrm{Res}_H^G(W)$ contiene exactamente una vez a la representación trivial de H.

Con esto, estamos en capacidad de demostrar el teorema de Frobenius.

Demostración del teorema de Frobenius. Esta demostración es un poco extensa, por lo que procederemos en varias etapas:

Paso 1. $|N'| = [G:H] - 1$, *y por ende* $|N| = [G:H]$.

En efecto, notemos que para $g \in G$, el conjunto gHg^{-1} depende únicamente de la clase lateral $gH \in G/H$ y no en g. Para esto notemos que si $gH = g'H$ entonces $Hg^{-1} = H(g')^{-1}$, con lo cual

$$g'H(g')^{-1} = g'HH(g')^{-1} = gHHg^{-1} = gHg^{-1}.$$

Además, para $g, h \in G$, si $gHg^{-1} = hHh^{-1}$, entonces $(h^{-1}g)H(h^{-1}g)^{-1} = H$, de donde, como H es un subgrupo de Frobenius, necesariamente $h^{-1}g \in H$ y así $gH = hH$. De este modo, como $gHg^{-1} \cap hHg^{-1} = 1$ si $gHg^{-1} \neq hHh^{-1}$, tenemos que

$$N' = G - \left(\bigsqcup_{gH \in G/H} (gHg^{-1} - \{1\}) \sqcup \{1\} \right),$$

y además, dado que la aplicación $H \to gHg^{-1}$ dada por $h \mapsto ghg^{-1}$ es una biyección, obtenemos

$$\begin{aligned} |N'| &= |G| - \sum_{gH \in G/H} (|gHg^{-1}| - 1) - 1 \\ &= |G| - \sum_{gH \in G/H} (|H| - 1) - 1 \\ &= |G| - |G/H|(|H| - 1) - 1 \\ &= |G| - \frac{|G|}{|H|}(|H| - 1) - 1 \\ &= \frac{|G|}{|H|} - 1. \end{aligned}$$

Lo que implica el resultado.

Paso 2. *Dada $f \in \mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(H)$, existe una única extensión de f a una función $\widetilde{f} \in \mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(G)$ tal que $\widetilde{f}(g) = f(1)$ para todo $g \in N$.*

En efecto, probemos primero la unicidad: Si $\widetilde{f}$ es una tal extensión, entonces

$$\widetilde{f}(h) = f(h) \qquad \text{y} \qquad \widetilde{f}(g) = f(1), \qquad \text{para todo } h \in H, g \in N.$$

Sea $g \in G$, $g \neq 1$. Si $g \notin N$, entonces $g = tht^{-1}$ para algún $h \in H$, y como $\widetilde{f}$ es una función de clases, tenemos

$$\widetilde{f}(g) = \widetilde{f}(tht^{-1}) = \widetilde{f}(h) = f(h).$$

Así $\widetilde{f}$ está unívocamente determinada por f.

Ahora probaremos la existencia de $\widetilde{f}$. Para ello, primero notemos que si $tht^{-1} = sh's^{-1}$ para ciertos $s, t \in G$, $h, h' \in H$, entonces tenemos que $s^{-1}th(s^{-1}t)^{-1} = h'$. Pero H es un subgrupo de Frobenius, por ende esto significa que $s^{-1}t \in H$. De este modo h' es un conjugado de h en H, y como f es una función de clase sobre H, tenemos que

$$f(h') = f(s^{-1}th(s^{-1}t)^{-1}) = f(h).$$

Con esto, podemos definir $\widetilde{f}$ del siguiente modo: Si $g \in N$, $\widetilde{f}(g) = 1$. Si $g \notin N$, escribimos $g = tht^{-1}$ con $t \in G$ y $h \in H$, y definimos $\widetilde{f}(g) = f(h)$. Por el razonamiento precedente, vemos que $\widetilde{f}$ está bien definida, es decir, el valor de $\widetilde{f}(g)$ para $g \notin N$ no depende de la escritura de g en la forma tht^{-1} con $t \in G$ y $h \in H$.

Queda probar que $\widetilde{f}$ es una función de clase. Para ello, sean $g, t \in G$ y supongamos que $g \neq 1$ (la clase de conjugación de 1 es $\{1\}$ y en este caso no hay nada que probar). Si $g \in N$ entonces

$tgt^{-1} \in N$, pues caso contrario, tendríamos $tgt^{-1} = shs^{-1}$ para ciertos $s \in G$, $h \in H$ de donde $g = (t^{-1}s)h(t^{-1}s)^{-1}$, lo que contradice que $g \in N$. De este modo $\widetilde{f}(g) = f(1) = \widetilde{f}(tgt^{-1})$. Si $g \notin N$, escribimos $g = shs^{-1}$ con $s \in G$ y $h \in H$ y tenemos que $tgt^{-1} = tsh(ts)^{-1}$ de donde

$$\widetilde{f}(g) = f(h) = \widetilde{f}(tgt^{-1}).$$

Paso 3. *Si* $f \in \mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(H)$, *entonces* $\widetilde{f} = \mathrm{Ind}_H^G(f) - f(1)\psi$, *donde* $\psi = \chi_P - 1$ *es el carácter definido en el Lema 4.21.*

Recordemos que P es la representación de permutación asociada a la acción de G sobre G/H y que $\chi_P = \mathrm{Ind}_H^G(\chi_{\mathbf{1}})$. Sea $F = \mathrm{Ind}_H^G(f) - f(1)(\chi_P - 1)$. Si $g \in N'$ tenemos que $tgt^{-1} \notin H$ para todo $t \in G$, de modo que

$$F(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{t\in G \\ tgt^{-1}\in H}} f(tgt^{-1}) - f(1) \left[\left(\frac{1}{|H|} \sum_{\substack{t\in G \\ tgt^{-1}\in H}} 1 \right) - 1 \right] = f(1) = \widetilde{f}(g).$$

Si $g \notin N'$, entonces $g = shs^{-1}$ para ciertos $s \in G, g \in H$, y tenemos que, como H es un subgrupo de Frobenius y f es una función de clase

$$\begin{aligned} F(g) &= \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{t\in G \\ tgt^{-1}\in H}} f(tgt^{-1}) - f(1) \left[\left(\frac{1}{|H|} \sum_{\substack{t\in G \\ tgt^{-1}\in H}} 1 \right) - 1 \right] \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{t\in G \\ st\in H}} f(h) - \frac{f(1)}{|H|} \sum_{\substack{t\in G \\ st\in H}} 1 + f(1) \\ &= f(h) - f(1) + f(1) = \widetilde{f}(g). \end{aligned}$$

De este modo, $F = \widetilde{f}$, que es lo que se deseaba.

Paso 4. *Si* $f_1, f_2 \in \mathbf{Class}_{\mathbb{C}}(H)$, *entonces* $\langle \widetilde{f_1} \mid \widetilde{f_2} \rangle_G = \langle f_1 \mid f_2 \rangle_H$.

En el Paso 1 probamos que gHg^{-1} depende únicamente de la clase gH. Con esto, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{f_1} \mid \widetilde{f_2} \rangle_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \widetilde{f_1}(g)\overline{\widetilde{f_2}(g)} \\ &= \frac{1}{|G|} \left[\widetilde{f_1}(1)\overline{\widetilde{f_2}(1)} + \sum_{\substack{h\in H-\{1\} \\ gH\in G/H}} \widetilde{f_1}(ghg^{-1})\overline{\widetilde{f_2}(ghg^{-1})} + \sum_{g\in N'} \widetilde{f_1}(g)\overline{\widetilde{f_2}(g)} \right]. \end{aligned}$$

Por el Paso 1, sabemos que N' tiene $[G:H]-1$ elementos, y dado que $\widetilde{f_1}(ghg^{-1}) = f_1(h)$ (y similarmente para f_2) tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{f_1} \mid \widetilde{f_2} \rangle_G &= \frac{1}{|G|} \left[f_1(1)\overline{f_2(1)} + [G:H] \sum_{h\in H-\{1\}} \widetilde{f_1}(h)\overline{\widetilde{f_2}(h)} + ([G:H]-1)f_1(1)\overline{f_2(1)} \right] \\ &= \frac{[G:H]}{|G|} \left[f_1(1)\overline{f_2(1)} + \sum_{h\in H-\{1\}} f_1(h)\overline{f_2(h)} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} f_1(h) \overline{f_2(h)}$$
$$= \langle f_1 \mid f_2 \rangle_H.$$

Paso 5. *Si χ es un carácter irreducible de H, entonces $\langle \widetilde{\chi} \mid \widetilde{\chi} \rangle_G = 1$, $\widetilde{\chi}(1) \geq 0$ y $\widetilde{\chi}$ es un carácter irreducible de G.*

Sea χ un carácter irreducible de H. Por el Paso 4 tenemos que

$$\langle \widetilde{\chi} \mid \widetilde{\chi} \rangle_G = \langle \chi \mid \chi \rangle_H = 1.$$

Ahora, tenemos que $\widetilde{\chi}(1) = \chi(1) = \deg(\chi) \geq 0$ (donde $\deg(\chi)$ es la dimensión, al que también llamamos grado, de la representación asociada a χ).

Por el Paso 3 tenemos que $\widetilde{\chi} = \operatorname{Ind}_H^G(\chi) - \chi(1)\psi$, y como $\operatorname{Ind}_H^G(\chi) \in R(G)$, $\chi(1) = \deg(\chi)$ y $\psi \in R(G)$, se sigue que $\widetilde{\chi} \in R(G)$ es un carácter virtual de G, pues es una combinación lineal con coeficientes enteros de caracteres de G. Sea $\chi_1, \ldots, \chi_r$ los caracteres irreducibles de G, entonces

$$\widetilde{\chi} = \sum_{j=1}^{r} a_j \chi_j$$

para ciertos $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$, con lo cual obtenemos que

$$1 = \langle \widetilde{\chi} \mid \widetilde{\chi} \rangle_G = \sum_{j=1}^{r} |a_j|^2,$$

lo que implica que $a_j = 0$ para todo salvo un único $i \in \{1, \ldots, r\}$. Para tal j tenemos que $a_j = \pm 1$. Pero dado que

$$0 \leq \widetilde{\chi}(1) = \chi_i(1) = a_j \deg(\chi_i)$$

concluimos que $a_i = 1$ y así $\widetilde{\chi} = \chi_i$, de donde $\widetilde{\chi}$ es un carácter irreducible de G.

Paso 6. *Toda representación $\rho : H \to GL(V)$* se extiende a una representación $\widetilde{\rho} : G \to \mathrm{GL}(\widetilde{V})$ tal que $N \leq \operatorname{Ker}(\widetilde{\rho})$.

Supongamos primero que $\rho : H \to \mathrm{GL}(V)$ es una representación irreducible de H. Por el Paso 5, el carácter irreducible χ_V se extiende a un único carácter irreducible $\widetilde{\chi_V}$ de G tal que $\widetilde{\chi_V}(g) = \chi_V(1)$ para todo $g \in N$. Sea $\widetilde{\rho} : G \to \mathrm{GL}(\widetilde{V})$ la representación irreducible asociada al carácter $\widetilde{\chi_V}$ de G. Entonces, notemos que

$$\dim(\widetilde{V}) = \widetilde{\chi_V}(1) = \chi_V(1),$$

y por lo tanto, para todo $g \in N$

$$\widetilde{\chi_V}(g) = \chi_V(1) = \dim(\widetilde{V}).$$

Por el Lema 4.20 se sigue que $\widetilde{\rho}(g) = 1$ para todo $g \in N$, es decir, que $N \leq \operatorname{Ker}(\widetilde{\rho})$.

Sea ahora V una representación arbitraria de H y sea $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_p$ una descomposición de V en suma directa de subrepresentaciones irreducibles y escribimos $\rho_j : H \to \mathrm{GL}(V_j)$ para las correspondientes representaciones de H en V_j. Por lo anterior, para cada $1 \leq j \leq p$ tenemos una representación irreducible $\widetilde{\rho_j} : G \to \mathrm{GL}(\widetilde{V_j})$ de G tal que $N \leq \operatorname{Ker}(\widetilde{\rho_j})$. Entonces $\widetilde{\rho} := \widetilde{\rho_1} \oplus \cdots \oplus \widetilde{\rho_p}$ es una representación de G que extiende a ρ y tal que

$$N \leq \bigcap_{j=1}^{p} \operatorname{Ker}(\widetilde{\rho_j}) = \operatorname{Ker}(\widetilde{\rho}).$$

Paso 7. *N es un subgrupo normal de G.*

Sean $\rho_j : H \to \mathrm{GL}(W_j)$ las representaciones irreducibles de H. Sea

$$M = \bigcap_{j=1}^{r} \mathrm{Ker}(\widetilde{\rho_j})$$

Entonces claramente $N \leq M \trianglelefteq G$. Notemos que si $g \in M \cap H$, entonces

$$\chi_{W_j}(g) = \widetilde{\chi_{W_j}}(g) = \widetilde{\chi_{W_j}}(1) = \chi_{W_j}(1).$$

Por el Lema 4.20 se sigue que $\rho_j(g) = 1$, para todo $1 \leq j \leq p$. Por el teorema de Wedderburn-Artin, tenemos que la aplicación

$$\varphi : \mathbb{C}[H] \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{r} \mathrm{End}(W_j).$$

es un isomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras. Por lo anterior, tenemos que $\varphi(g) = 1$ de modo que $g = 1$. Así $M \cap H = 1$. Entonces, para todo $g \in G$ se sigue que

$$1 = g(M \cap H)g^{-1} = gMg^{-1} \cap gHg^{-1} = M \cap gHg^{-1}.$$

Esto implica que

$$M - \{1\} \subseteq G - \bigcup_{g \in G} gHg^{-1} = N',$$

y por ende $M \leq N$. Concluimos entonces que $M = N$ y por ende N es un subgrupo normal de G.

Paso 8. $G = N \rtimes H$.

Por construcción es claro que $H \cap N = 1$. Además tenemos la fórmula bien conocida

$$|NH| = \frac{|H||N|}{|H \cap N|},$$

de donde, como $|N| = [G : H]$ (por el Paso 1), se tiene que

$$|NH| = |H|[G : H] = |G|,$$

lo que implica que $G = NH$. Esto completa la demostración. ■

Observación. Hagamos un resumen de las ideas claves en la demostración anterior: Lo realmente complicado es probar que $N \trianglelefteq G$. Para esto la estrategia fue probar que N es igual a la intersección de una familia de grupos normales. ¿Cuáles grupos normales? Precisamente los núcleos de ciertas representaciones irreducibles de G. En la construcción de estas representaciones irreducibles apropiadas es donde juega un rol fundamental la teoría de caracteres: Si nos fijamos, nunca construimos explícitamente tales representaciones, ¡lo que hicimos fue construir sus caracteres!

Ejercicio 4.23 (Recíproco al teorema de Frobenius)**.** Suponga que $G = N \rtimes H$. Pruebe que G es un grupo de Frobenius si y sólo si la acción por conjugación de H sobre $N - \{1\}$ es libre, es decir, si para todo $h \in H$ y $g \in N$ con $g, h \neq 1$ se tiene que $hgh^{-1} \neq g$.

Observación (Algunos comentarios finales). Thompson probó que para $H \neq 1$, todo grupo $G = N \rtimes H$ de Frobenius verifica que N es un grupo nilpotente. Esto constituye uno de los primeros pasos hacia la demostración del afamado teorema de Feit-Thompson y para el *teorema de clasificación de grupos simples finitos.*

El teorema de Frobenius fue generalizado por Suzuki: *Todo CA-grupo finito de orden impar es soluble.* un CA-grupo es un grupo G tal que para todo $x \in G$, el centralizador $C_G(x) = \{g \in G \mid gx = xg\}$ es abeliano.

Para una muy bonita discusión sobre estos tópicos, se sugiere leer el blog de Terence Tao: *The theorems of Frobenius and Suzuki on finite groups.*