Lección nº 1 Octubre, 2021

1. Particiones y tableaux

1.1. Definiciones básicas

Definición. Una *partición* es una secuencia finita $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ donde cada λ_i es un entero no negativo y

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k > 0.$$

A los números λ_i los llamamos las *partes* de λ. Al número k lo llamamos el *largo* de la partición λ y lo denotamos por $\ell(\lambda)$. El *peso* de λ se define por

$$|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k.$$

Si $n = |\lambda|$, decimos que λ *es una partición de* n y escribimos $\lambda \vdash n$. Denotamos por Par_n al conjunto de particiones de n, y definimos

$$\mathrm{Par} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{Par}_n$$

Ejemplos 1.1.
1. La única partición de 0 es la partición vacía $\emptyset$, es decir, $\mathrm{Par}_0 = \{\emptyset\}$.
2. La única partición de 1 es (1), es decir, $\mathrm{Par}_1 = \{(1)\}$.
3. Las particiones de 2 son (2) y $(1,1)$, así
$$\mathrm{Par}_2 = \{(2), (1,1)\}.$$
4. Tenemos
$$\mathrm{Par}_3 = \{(3), (2,1), (1,1,1)\}.$$

Observación. En la práctica es útil flexibilizar la definición de partición permitiendo a ciertas entradas al final tomar el valor cero. Informalmente, decimos que dos secuencias $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ y $(\mu_1, \ldots, \mu_m)$ que satisfacen

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 0 \quad \text{y} \quad \mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_m \geq 0$$

representan a la misma partición si existe un índice j tal que $\lambda_i = \mu_i > 0$ para todo $1 \leq i \leq j$ y tal que $\lambda_i = 0$ para todo $j+1 \leq i \leq k$ y $\mu_i = 0$ para todo $j+1 \leq i \leq m$. Por ejemplo, las tres secuencias

$$(5,4,4,2,1), \quad (5,4,4,2,1,0,0) \quad \text{y} \quad (5,4,4,2,1,0,0,0,0,0)$$

representan a la misma partición de 16. También resulta útil añadir una cantidad infinita de ceros al final de la última entrada no nula de una partición, de modo que la sucesión infinita

$$(5,4,4,2,1,0,0,0,0,0,\ldots)$$

representa a la misma partición mencionada arriba.

Ahora vamos a expresar esto de manera muy rigurosa. Para cada $n \geq 0$, escribimos

$$P_n = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0\}$$

y

$$P_\infty = \{(\lambda_i)_{i=1}^\infty \in \mathbb{Z}^n \mid \lambda_i \geq \lambda_{i+1} \text{ para todo } i \geq 1 \text{ y } \lambda_i = 0 \text{ para algún } i \geq 1\}.$$

Sea

$$P = P_\infty \cup \bigcup_{n \geq 1} P_n,$$

y sobre P se define la siguiente relación de equivalencia: dos sucesiones (finitas o infinitas) $(\lambda_i) \in P$ y $(\mu_i) \in P$ son equivalentes si existe un índice j tal que

$$\lambda_i = \mu_i > 0 \quad \text{para } 1 \leq i \leq j \quad \text{y} \quad \lambda_i = \mu_j = 0, \quad \text{para } i > j.$$

Denotamos por P' al conjunto cociente de P por esta relación, es decir, el conjunto de clases de equivalencia, y denotamos temporalmente a la clase de equivalencia que contiene a la sucesión $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ por $[\lambda_1, \lambda_2, \dots]$. Es claro entonces que existe una biyección $\varphi : \mathrm{Par} \to P'$ dada por

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \mapsto [\lambda_1, \dots, \lambda_k].$$

Así, podemos identificar al conjunto P' con el conjunto de particiones, y entonces es claro que identificamos dos sucesiones si difieren solamente por ceros al final. En lo que sigue escribiremos $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ en lugar de $[\lambda_1, \lambda_2, \dots]$.

Definición. Sea λ una partición. Escribimos $m_i = m_i(\lambda)$ al número de partes de λ que son iguales a i, es decir,

$$m_i(\lambda) = \#\{j \mid \lambda_j = i\}.$$

Usando los enteros $m_i(\lambda)$ podemos introducir una nueva notación muy útil para escribir particiones: Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, escribimos

$$\lambda = (1^{m_1(\lambda)}, 2^{m_2(\lambda)}, 3^{m_3(\lambda)}, \dots),$$

o, si $a_1, \dots, a_r$ son todos los enteros tales que $m_{a_i}(\lambda) \neq 0$, entonces escribimos

$$\lambda = (a_1^{m_{a_1}(\lambda)}, a_2^{m_{a_2}(\lambda)}, \dots, a_r^{m_{a_r}(\lambda)})$$

Ejemplo 1.2. Sea $\lambda = (5, 4, 4, 4, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Entonces podemos escribir

$$\lambda = (1^6, 2^2, 3^0, 4^3, 5^1) = (1^6, 2^2, 4^3, 5^1).$$

Con esto, podemos escribir

$$|\lambda| = \sum_{i \geq 1} i m_i(\lambda), \quad \text{y} \quad \ell(\lambda) = \sum_{i \geq 1} m_i(\lambda)$$

1.2. Diagramas de Young

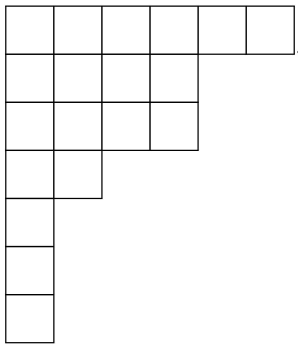
Definición. Sea λ una partición. El *diagrama de Young* de λ es el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$\{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,|\, 1 \leq j \leq \lambda_i \text{ y } 1 \leq i \leq \ell(\lambda)\}.$$

Los elementos (i,j) del diagrama de Young los llamamos los *nodos* del diagrama.

Para representar gráficamente un diagrama de Young, consideramos el plano xy con el eje y positivo orientado hacia abajo en lugar hacia arriba, y al nodo (i,j) le asociamos el cuadrado de vértices $(i-1, j-1)$, $(i-1, j)$, $(i, j-1)$ y $(i-j)$.

Ejemplo 1.3. Consideremos la partición $\lambda = (6,4,4,2,1,1,1)$. Su diagrama de Young es

.

En lo que sigue, identificaremos a una partición con su diagrama de Young, y nos referiremos a los nodos de un diagrama como sus cajas.

Definición. Sea λ una partición. La partición *transpuesta* (también llamada *conjugada*) de λ se denota por λ' (también por λ^t) y se define como

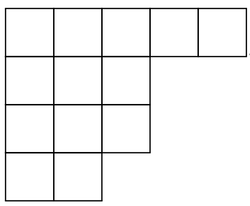
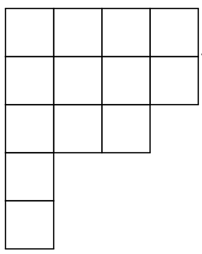
$$\lambda' = \{(j,i) \,|\, (i,j) \in \lambda\}.$$

Es decir, λ' se obtiene a partir de λ colocando la i-ésima fila de λ como la i-ésima columna de λ'.

Más rigurosamente, λ' es la partición definida por

$$\lambda'_i = \#\{j \,|\, \lambda_j \geq i\}.$$

Ejemplo 1.4. Si $\lambda = (5,3,3,2)$ entonces $\lambda' = (4,4,3,1,1)$. En diagramas

$\lambda =$ , $\lambda' =$ .

Observaciones. Sea λ una partición.

(1) Para cada entero positivo n, la aplicación $\lambda \mapsto \lambda'$ define una involución $\mathrm{Par}_n \to \mathrm{Par}_n$, es decir $\lambda'' = \lambda$.

(2) $\ell(\lambda) = \lambda'_1$.

(3) Para cada $i \geq 1$ se tiene la igualdad

$$m_i(\lambda) = \lambda'_i - \lambda'_{i+1}.$$

1.3. Skew-diagramas

Definición. Dadas dos particiones λ y μ, escribimos $\lambda \subseteq \mu$ si $\lambda_i \leq \mu_i$ para todo $i \geq 1$. Esto es equivalente a decir que el diagrama de λ es un subconjunto del diagrama de μ.

Un *skew-diagrama*[1] es una diferencia de diagramas $\mu \setminus \lambda$, donde λ y μ son particiones con $\lambda \subseteq \mu$.

Si $\theta = \mu \setminus \lambda$, denotamos $|\theta| = |\mu| - |\lambda|$. Para cada i, escribimos

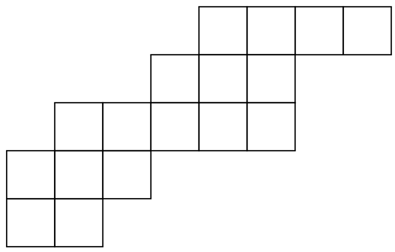
$$\theta_i = \mu_i - \lambda_i \quad \text{y} \quad \theta_i' = \mu_i' - \lambda_i',$$

de modo que

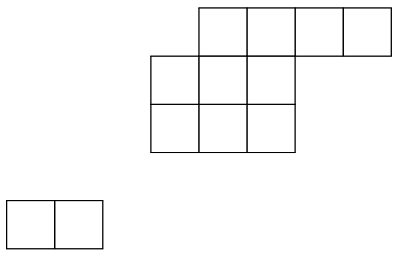
$$|\theta| = \theta_1 + \theta_2 + \cdots .$$

Nótese que si λ es una partición, entonces $\lambda = \lambda \setminus \emptyset$ es también un skew-diagrama.

Ejemplos 1.5. 1. Sean $\lambda = (4,3,1)$ y $\mu = (8,6,6,3,2)$, entonces $\lambda \subseteq \mu$ y

$\mu \setminus \lambda =$ 

2. Sean $\lambda = (4,3,3,3)$ y $\mu = (8,6,6,3,2)$, entonces $\lambda \subseteq \mu$ y

$\mu \setminus \lambda =$ 

Observación. Un skew-diagrama puede escribirse como una diferencia de diagramas en más de una forma. Por ejemplo, si $\lambda = (2^3)$, $\mu = (3^2, 2)$ y $\tilde{\lambda} = (2^2)$, $\tilde{\mu} = (3^2)$, entonces $\mu \setminus \lambda = \tilde{\mu} \setminus \tilde{\lambda}$.

Definición. Una *banda horizontal* es un skew-diagrama θ tal que $\theta_i' \leq 1$ para cada $i \geq 1$. Si θ tiene en total m cajas, nos referiremos a este como una *m-banda horizontal.*

Entonces θ es una banda horizontal si y sólo si en cada columna de θ hay a lo mucho una caja.

Proposición 1.6. *Un skew-diagrama $\theta = \mu \setminus \lambda$ es una banda horizontal si y sólo si las particiones λ y μ están* entrelazadas*, en el sentido de que*

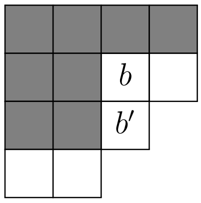
$$\mu_1 \geq \lambda_1 \geq \mu_2 \geq \lambda_2 \geq \cdots .$$

[1]En español el término más apropiado es *diagrama escindido*, pero nunca he conocido a alguien que use esta terminología, por lo que nos referiremos a estos como skew-diagramas.

Demostración. Supongamos que θ es una banda horizontal. Dado que $\lambda \subseteq \mu$ es claro que $\mu_i \geq \lambda_i$ para cada $i \geq 1$, por lo tanto, basta probar que $\lambda_i \geq \mu_{i+1}$ para cada $i \geq 1$. Supongamos lo contrario, es decir, que para algún $i \geq 1$, $\mu_{i+1} > \lambda_i$. Entonces tenemos

$$\mu_i \geq \mu_{i+1} > \lambda_i \geq \lambda_{i+1}, \tag{1}$$

de modo que las cajas en las posiciones (i, j) y $(i+1, j)$, con $j = \lambda_i + 1$, pertenecen al skew-diagrama θ. En efecto, estas no pertenecen a λ pues $j > \lambda_i$ y pertenecen a μ pues $j = \lambda_i + 1 \leq \mu_{i+1} \leq \mu_i$, en virtud de (1). Pero ambas cajas están en la j-ésima columna de θ, lo que significa que $\theta'_j \geq 2$, y esto contradice que θ es una banda horizontal. Por lo tanto las particiones λ y μ están entrelazadas. El siguiente diagrama muestra la situación recientemente expuesta, donde $b = (i, j)$ y $b' = (i+1, j)$.

$T =$ 

Recíprocamente, supongamos que λ y μ están entrelazadas, de donde en particular $\lambda_i \leq \mu_i$ para todo $i \geq 1$ y así $\lambda \subseteq \mu$, y consecuentemente $\theta = \mu \setminus \lambda$ es un skew-diagrama. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que θ no es una banda horizontal, entonces existe j tal que $\theta_j \geq 2$, de donde existen al menos dos cajas (i, j) e (i', j) en la j-ésima columna del skew-diagrama θ, con $i < i'$. Luego, como μ y λ son particiones, la caja $(i+1, j)$ pertenece a μ pero no a λ (¿por qué?) y por ende $\mu_{i+1} > \lambda$, lo que contradice el hecho de que las particiones λ y μ están entrelazadas. $\square$

Aunque no las utilizaremos, podemos definir de manera análoga las *bandas verticales* como skew-diagramas $\theta = \mu \setminus \lambda$ tales que $\theta_i \geq 1$ para todo $i \geq 1$. Esto significa que cada fila de θ tiene a lo más una caja. Al igual que antes, esto equivale a afirmar que las particiones transpuestas λ' y μ' están entrelazadas.

1.4. Tableaux de Young

Definición. Sean λ y μ dos particiones con $\mu \subseteq \lambda$. Un *tableau de Young semi-estándar* de *forma* $\lambda \setminus \mu$ es una sucesión finita de particiones $T = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)})$ con

$$\mu = \lambda^{(0)} \subseteq \lambda^{(1)} \subseteq \lambda^{(2)} \subseteq \cdots \subseteq \lambda^{(r)} = \lambda,$$

tal que para cada $i \geq 1$, el skew-diagrama $\theta^{(i)} = \lambda^{(i)} \setminus \lambda^{(i-1)}$ es una banda horizontal (posiblemente vacía). Decimos que T es un *tableau de Young estándar* si para cada $i \geq 1$ se verifica $|\theta^{(i)}| = 1$.

Denotamos al conjunto de todos los tableaux de Young semi-estándar de forma $\lambda \setminus \mu$ por $\mathrm{SSYT}(\lambda \setminus \mu)$ y al conjunto de tableaux de Young estándar de forma $\lambda \setminus \mu$ por $\mathrm{SYT}(\lambda \setminus \mu)$.

Existe una descripción alternativa de los tableaux de Young que resulta muy útil, la misma que describimos a continuación. A cada tableaux de Young semi-estándar T de forma $\lambda \setminus \mu$ le asociamos una función (que denotamos nuevamente por T, esperando esto no cause confusión) $T : \lambda \setminus \mu \to \mathbb{Z}_{>0}$, del siguiente modo: Dada una caja b en el skew-diagrama $\lambda \setminus \mu$, entonces existe i tal que $b \in \theta^{(i)}$, y definimos $T(b) = i$. Esta función T verifica las siguiente propiedades:

(T1) $T : \lambda \setminus \mu \to \mathbb{Z}_{>0}$ es débilmente creciente por filas. Es decir, si (i, j) y $(i, j+1)$ son cajas adyacentes en la i-ésima fila de $\lambda \setminus \mu$, entonces $T(i, j) \leq T(i, j+1)$.

(T2) $T : \lambda \setminus \mu \to \mathbb{Z}_{>0}$ es creciente por columnas. Es decir, si (i, j) e $(i+1, j)$ son dos cajas adyacentes en la j-ésima columna de $\lambda \setminus \mu$, entonces $T(i, j) < T(i + 1, j)$.

En efecto, sean (i, j) y $(i, j + 1)$ dos cajas en la i-ésima fila de $\lambda \setminus \mu$. Sea k el único índice tal que $(i, j) \in \theta^{(k)}$. Entonces hay dos posibilidades: o bien $(i, j + 1) \in \theta^{(k)}$ o $(i, j + 1) \in \theta^{(\ell)}$ para cierto $\ell > k$. En el primer caso tebemos que $T(i, j) = k = T(i, j + 1)$, en el segundo caso tenemos que $T(i, j) = k < \ell = T(i, j + 1)$. Esto prueba (T1). Para probar (T2) el razonamiento es similar, salvo que en este caso el skew-diagrama $\theta^{(k)}$ tiene a lo más una caja en cada columna.

De manera temporal, denotemos el conjunto de todas las funciones $T : \lambda \setminus \mu \to \mathbb{Z}_{>0}$ que satisfacen (T1) y (T2) mediante $\mathcal{SSYT}(\lambda \setminus \mu)$. De este modo hemos obtenido una aplicación

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{SSYT}(\lambda \setminus \mu) & \to & \mathcal{SSYT}(\lambda \setminus \mu) \\ T & \mapsto & [T : \lambda \setminus \mu \to \mathbb{Z}_{>0}]. \end{array} \tag{2}$$

Proposición 1.7. *La aplicación* (2) *es una biyección. Más aún, la imagen del conjunto* $\mathrm{SYT}(\lambda \setminus \mu)$ *bajo esta biyección consiste de las funciones* $T : \lambda \setminus \mu \to \{1, 2, \dots, n\}$, *donde* $n = |\lambda \setminus \mu|$ *que, además de* (T1) *y* (T2), *son biyecciones.*

Demostración. Para probar la primera afirmación, construiremos explícitamente una inversa para esta aplicación: Dada una función $T : \lambda \setminus \mu \to \mathbb{Z}_{>0}$ que verifica (T1) y (T2), definimos

$$\lambda^{(i)} = T^{-1}(\{1, 2, \dots, i\}).$$

Es claro de la construcción que, si tomamos $\lambda^{(0)} = \mu$, obtenemos

$$\mu = \lambda^{(0)} \subseteq \lambda^{(1)} \subseteq \lambda^{(2)} \subseteq \cdots \subseteq \lambda^{(r)} = \lambda,$$

donde r es el mayor entero que aparece en el recorrido de T. Debemos probar que (i) $\lambda^{(i)}$ es una partición para cada $i \geq 1$ y que (ii) cada $\theta^{(i)} = \lambda^{(i)} \setminus \lambda^{(i-1)}$ es una banda horizontal, para cada $i \geq 1$. Por construcción, es claro que esto define una inversa para la aplicación (2). Pero (i) y (ii) son una reformulación de (T1) y (T2) en términos de skew-diagramas, respectivamente.

La segunda afirmación es consecuencia trivial de la definición de diagrama de Young estándar. $\square$

En virtud de la proposición anterior, no haremos distinción entre los conjuntos $\mathrm{SSYT}(\lambda \setminus \mu)$ y $\mathcal{SSYT}(\lambda \setminus \mu)$, y trataremos a un tableaux de Young (estándar o semi-estándar) como una función verificando las condiciones apropiadas.

Para representar a un tableau T dibujamos su diagrama de Young y en la caja b ubicamos el número $T(b)$.

Ejemplos 1.8. (1) El siguiente es un tableau de Young semi-estándar de forma $\lambda \setminus \mu$ con $\lambda = (5, 3, 3, 2)$ y $\mu = (3, 3, 1)$

$$T = \begin{array}{ccccc} & & & \boxed{3} & \boxed{4} \\ & & & & \\ & \boxed{1} & \boxed{1} & & \\ \boxed{3} & \boxed{3} & & & \end{array}$$

En este caso la sucesión asociada a este tableau es

$$\lambda^{(0)} = (3,3,1), \quad \lambda^{(1)} = (3,3,3), \quad \lambda^{(2)} = (3,3,3), \quad \lambda^{(3)} = (4,3,3,2), \quad \lambda^{(4)} = (5,3,3,2),$$

donde, evidentemente, $\lambda^{(0)} = \mu$ y $\lambda^{(4)} = \lambda$.

(2) Para $\lambda = (3,2)$ existen exactamente 5 tableaux de Young estándar:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

Definición. Si $\lambda\backslash\mu$ es un skew-tableau, denotamos por $f^{\lambda\backslash\mu}$ a la cardinalidad del conjunto $\mathrm{SYT}(\lambda\backslash\mu)$.