Lección nº 2 Octubre, 2021

2. Algoritmo de Schensted

2.1. Inserción por filas

Vamos a describir el algoritmo[1] fundamental de este curso, llamado *algoritmo de inserción por filas*, y que fue introducido por Craige Schensted[2] en 1961.

El algoritmo recibe como entradas un tableau de Young semi-estándar T y un entero positivo x, y nos proporciona como salida un tableau de Young semi-estándar, denotado por $T \leftarrow x$, cuya forma es una partición con una caja adicional a las cajas de la forma de T. A continuación definimos este.

Algoritmo 2.1 (Inserción por filas)**.** Sea T un tableau de forma λ y x un entero positivo.

1. Si x es no menor que todas las entradas de la primera fila de T, agregamos x en una nueva caja al final de la primera fila.
2. En caso contrario, sea j la columna de λ tal que la entrada $x' = T(1, j)$ verifica que $x' > x$ y j es minimal con respecto a esta propiedad. Entonces reemplazamos x' por x (es decir x *expulsa* a x' y ocupa su lugar). Decimos que x fue *insertado* en esta fila.
3. Repetimos el procedimiento anterior con x' en la segunda fila.
4. El proceso se repite en las filas siguientes y termina cuando una entrada sea ubicada al final de una fila o como la primera entrada de una nueva fila.

Al arreglo resultante lo denotamos por $T \leftarrow x$.

Ejemplo 2.2. Consideremos el tableau T dado a continuación:

1	2	3	3
2	4	4	5
3	5	6	
4	6		

Vamos a insertar el número 2 en este tableau:

[1] En algunos casos el lector encontrará la palabra **algortimo** en lugar de la palabra algoritmo. Esto nunca será intencional. No padezco de dislexia, pero tengo una fuerte tendencia a teclear las letras en orden distinto en esta palabra.

[2] Craig Schensted (1927-2021), físico y matemático estadounidense.

$$\xrightarrow{2} \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&\colorbox{lightgray}{2}&3\\ \hline 2&4&4&5\\ \hline 3&5&6\\ \cline{1-3} 4&6\\ \cline{1-2}\end{array} \xrightarrow{3} \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&2&3\\ \hline 2&\colorbox{lightgray}{3}&4&5\\ \hline 3&5&6\\ \cline{1-3} 4&6\\ \cline{1-2}\end{array} \xrightarrow{4} \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&2&3\\ \hline 2&3&4&5\\ \hline 3&\colorbox{lightgray}{4}&6\\ \cline{1-3} 4&6\\ \cline{1-2}\end{array} \xrightarrow{5} \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&2&3\\ \hline 2&3&4&5\\ \hline 3&4&6\\ \cline{1-3} 4&\colorbox{lightgray}{5}\\ \cline{1-2}\end{array} \xrightarrow{6} \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&2&3\\ \hline 2&3&4&5\\ \hline 3&4&6\\ \cline{1-3} 4&5\\ \cline{1-2} \colorbox{lightgray}{6}\\ \cline{1-1}\end{array}$$

Para empezar, el 2 expulsa al 3 en la tercera columna de la primera fila. Luego el 3 expulsado anteriormente, expulsa al 4 de la segunda fila. Luego 4 expulsa al 5 en la tercera fila. Posterior a esto, el 5 expulsa al 6 de la cuarta fila y finalmente el 6 se ubica como la primera caja en una nueva fila. El último arreglo en esta sucesión corresponde a $T \leftarrow 2$.

Definición. Dado un tableau T y un entero positivo x, la *ruta de inserción de* x, denotada por $I(T \leftarrow x)$ es el conjunto de todas las cajas (i, j) en las cuales fue insertado algún elemento durante el algoritmo. A la caja $(i, j) \in I(T \leftarrow x)$ con i maximal lo denominamos la *nueva caja* de $T \leftarrow x$.

En el ejemplo anterior, la ruta de inserción es

$$I(T \leftarrow 2) = \{(1, 3), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 1)\}.$$

En el arreglo resultante esto se ve como sigue:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&\colorbox{lightgray}{2}&3\\ \hline 2&\colorbox{lightgray}{3}&4&5\\ \hline 3&\colorbox{lightgray}{4}&6\\ \cline{1-3} 4&\colorbox{lightgray}{5}\\ \cline{1-2} \colorbox{lightgray}{6}\\ \cline{1-1}\end{array}$$

En este ejemplo, observamos que cuando bajamos una fila, la ruta de inserción se mueve débilmente hacia la izquierda. Además el arreglo resultante es un tableau de Young semi-estándar. Esto no es una coincidencia:

Lema 2.3. *Sea T un tableau de Young semi-estándar y x un entero positivo. La ruta $I(T \leftarrow x)$ se mueve débilmente hacia la izquierda conforme avanza hacia abajo. Más precisamente, si $(i, j), (i + 1, j') \in I(T \leftarrow x)$, entonces $j' \leq j$.*

Demostración. Primero, es claro que en cada etapa del algoritmo, las filas se mantienen débilmente crecientes.

Supongamos que $(i, j) \in I(T \leftarrow x)$, entonces tenemos dos posibilidades:

- Si la caja $(i + 1, j)$ pertenece a la partición en cuestión, entonces como T es un tableau semi-estándar, tenemos que es estrictamente por columnas y así $T(i, j) < T(i + 1, j)$. Dado que (i, j) está en la ruta de inserción, la entrada $T(i, j)$ es expulsada a la fila $i + 1$, en la cual debe ubicarse en una posición $(i + 1, j')$. Entonces en el nuevo tableau, al que denotamos T' tendremos $T'(i + 1, j') = T(i, j) < T(i + 1, j)$ y como el tableau es débilmente creciente por filas, debemos tener $j' \leq j$, como se deseaba.
- Si la caja $(i + 1, j)$ no pertenece a la partición en cuestión, sea $j'' = \lambda_{i+1}$, entonces $j > j''$, entonces necesariamente $j' \leq j'' + 1 \leq j$.

$\square$

Lema 2.4 (Lema de inserción)**.** *Sea T un tableau de Young semi-estándar y x, x' dos enteros positivos. Consideremos el arreglo $(T \leftarrow x) \leftarrow x'$, es decir, insertando por filas x en T y luego insertando por filas x' en $(T \leftarrow x)$. Sea b la nueva caja de $T \leftarrow x$ y b' la nueva caja de $(T \leftarrow x) \leftarrow x'$. Entonces*

(a) *Si $x \leq x'$, entonces la ruta $I(T \leftarrow x)$ yace estrictamente a la izquierda de la ruta $I((T \leftarrow x) \leftarrow x')$ y además b yace estrictamente a la izquierda y débilmente abajo de b'.*

Más rigurosamente, si $(i, j) \in I(T \leftarrow x)$ y $(i, j') \in I((T \leftarrow x) \leftarrow x')$, entonces $j < j'$ y además

$$\#I((T \leftarrow x) \leftarrow x') \leq \#I(T \leftarrow x).$$

(b) *Si $x > x'$, entonces la ruta $I((T \leftarrow x) \leftarrow x')$ yace débilmente a la izquierda de la ruta $I(T \leftarrow x)$ y además b' yace débilmente a la izquierda y estrictamente debajo de b.*

Demostración. Probemos la parte (a). Para esto, supongamos que $x \leq x'$. Supongamos que x expulsa a un elemento y en la primera fila. Entonces $x < y$. Luego, x' expulsa un elemento y' de la primera fila, y como $x \leq x'$, el elemento expulsado debe estar estrictamente a la derecha de donde se encontraba y. Más precisamente, si $(1, j)$ es la posición de y y $(1, j')$ es la posición de y', necesariamente $j < j'$. Esto se debe a que x' debe expulsar a la primera entrada estrictamente mayor a x', de izquierda a derecha. Este argumento se repite fila por fila. Ahora, claramente b está estrictamente a la izquierda de b'. Si b fue agregada en la posición (i, j), entonces fue agregada al final de esa fila, pues es donde el proceso de inserción termina. Luego, si la ruta $I((T \leftarrow x) \leftarrow x')$ tiene una caja en dicha fila, debe ser a la derecha de (i, j), y por ende es en $(i, j + 1)$. Caso contrario no tiene caja en dicha fila y b' se encuentra arriba de b.

La demostración de (b) es similar y se deja como ejercicio para el lector. □

Corolario 2.5. *Si T es un tableau de Young semi-estándar, y x es un entero positivo, entonces $T \leftarrow x$ es un tableau de Young semi-estándar.*

Demostración. Por lo visto anteriormente, el arreglo $T \leftarrow x$ es débilmente creciente por filas. Supongamos que un elemento x' en la fila i expulsa a un elemento y en la columna j, entonces $x' < y$ y y se ubica en la fila $i + 1$ y en una columna $j' \leq j$, dado que la entrada en la posición $(i + 1, j')$ es estrictamente mayor que la entrada $T(i, j') \leq x' < y$, se sigue que las columnas se mantienen estrictamente crecientes durante el proceso. □

2.2. Expulsión en reversa

El algoritmo de inserción por filas es reversible: Si iniciamos con tableau semi-estándar T y un entero positivo x, obtenemos un nuevo tableau semi-estándar $T' = T \leftarrow x$, en el cual se agregó una nueva caja b. Por lo tanto, el conocimiento de T y x, nos provee de dos datos: T' y b. Recíprocamente, si conocemos T' y b, podemos recuperar el tableau original T y el elemento x que fue insertado. Para esto procedemos como sigue:

La entrada y en la caja b tuvo que ser expulsada en la fila anterior por una entrada y'. Para que esto suceda, debemos tener que $y' < y$ y ningún elemento a la izquierda de y es mayor a y'. Por lo tanto, ubicamos la entrada más a la derecha que es estrictamente menor que y, entonces y expulsa a la entrada y' y repetimos este proceso con y' en la fila arriba de esta.

Ejemplo 2.6. Consideremos el tableau T' dado a continuación y supongamos que la última caja en ser añadida fue la caja sombreada.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&2\\\hline 2&3&3\\\hline 3&\colorbox{lightgray}{5}\\\cline{1-2} 4\\\cline{1-1}\end{array}$$

Entonces tenemos la siguiente expulsión en reversa:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&2\\\hline 2&3&5\\\hline 3&\colorbox{lightgray}{5}\\\cline{1-2} 4\\\cline{1-1}\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&2\\\hline 2&\colorbox{lightgray}{5}&5\\\hline 3\\\cline{1-1} 4\\\cline{1-1}\end{array} \xrightarrow{3} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&\colorbox{lightgray}{3}\\\hline 2&5&5\\\hline 3\\\cline{1-1} 4\\\cline{1-1}\end{array} \xrightarrow{2}$$

De esta forma, tenemos que $T' = T \leftarrow 2$, donde

$$T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&3\\\hline 2&5&5\\\hline 3\\\cline{1-1} 4\\\cline{1-1}\end{array}$$

Gracias a esto, estamos en condiciones de probar el siguiente resultado.

Proposición 2.7. *Sea λ una partición y $T \in \mathrm{SSYT}(\lambda)$. Sean $x_1, \ldots, x_n$ enteros positivos, y definamos recursivamente $T_0 = T$,*

$$T_1 = T_0 \leftarrow x_1, \quad T_{j+1} = T_j \leftarrow x_j, \quad \textit{para } 0 \leq j \leq n-1.$$

Sea μ la forma de T_n. Entonces

(a) Si $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, entonces el skew-diagrama $\mu \setminus \lambda$ es una banda horizontal. Recíprocamente, si $\mu \setminus \lambda$ es una banda horizontal con $|\mu \setminus \lambda| = n$, y $U \in \mathrm{SSYT}(\mu)$, existen un único $T \in \mathrm{SSYT}(\lambda)$ y únicos enteros positivos $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ tales que $U = T_n$.

(b) Si $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$, entonces el skew-diagrama $\mu \setminus \lambda$ es una banda vertical. Recíprocamente, si $\mu \setminus \lambda$ es una banda vertical con $|\mu \setminus \lambda| = n$ y $U \in \mathrm{SSYT}(\mu)$, existen un único $T \in \mathrm{SSYT}(\lambda)$ y únicos enteros positivos $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ tales que $U = T_n$.

Demostración. Probaremos (a). La demostración de (b) es similar y se deja para el lector. Supongamos entonces que $x_1 \leq x_2 \leq x_n$. Las cajas finales de dos inserciones sucesivas nunca se encuentra en la misma columna por la parte (a) del lema de inserción. Dado que estas cajas son las que conforman el skew-diagrama $\mu \setminus \lambda$, se sigue que este debe ser una banda horizontal.

Recíprocamente, dado que las cajas de $\mu \setminus \lambda$ se encuentran todos en columnas distintas, realizamos expulsión en reversa en U iniciando de la caja más a la derecha de $\mu \setminus \lambda$ y continuando hacia la izquierda. Entonces obtenemos un tableau T y elementos $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ que fueron expulsados en el proceso. Entonces claramente $U = T_n$. En cada iteración, obtenemos que $x_i \leq x_{i+1}$, pues caso contrario entraríamos en la condición (b) del lema de inserción, y esto contradice el hecho de que $\mu \setminus \lambda$ es una banda horizontal. Así, tenemos que $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. La unicidad de T es inmediata pues las operaciones de inserción y de expulsión en reversa son mutuamente inversas. $\square$