Lección nº 3 Octubre, 2021

3. El monoide pláxico

3.1. La palabra fila de un tableau

Definición. Una *palabra* es una sucesión finita $w = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números enteros positivos. A las entradas x_i se las llama las *letras* de w. Dadas dos palabras $w = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $w' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_m)$ su *yuxtaposición*, denotada por ww' o $w \cdot w'$ se define como la sucesión $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_m)$. El *largo* de la palabra $w = x_1 \ldots x_n$ se define como $\ell(w) = n$.

Para aligerar la escritura, escribiremos $x_1 \ldots x_n$ para denotar a la palabra $(x_1, \ldots, x_n)$.

Sea $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ una partición y sea $T \in \mathrm{SSYT}(\lambda)$, entonces, definimos la *palabra de la i-ésima fila de T*, denotada por $w^i(T)$ como la palabra

$$w^i(T) = T(i,1)T(i,2)\ldots T(i,\lambda_i),$$

y definimos la *palabra fila de T*, denotada por $w(T)$ o $w_{\mathrm{row}}(T)$, por

$$w(T) = w_k(T)w_{k-1}(T)\cdots w_1(T).$$

Ejemplo 3.1. Si T es tableau

1	1	2	3	3
2	3	3	5	
4	4			
5	6			

entonces

$$\begin{aligned} w^1(T) &= 11233 \\ w^2(T) &= 2335 \\ w^3(T) &= 44 \\ w^4(T) &= 56 \end{aligned}$$

y tenemos que

$$w(T) = 5644233511233.$$

La palabra de un tableau de Young semi-estándar sobre un skew-diagrama se define de manera similar: Sean λ, μ dos particiones con $\lambda \subseteq \mu$ y sea $T \in \mathrm{SSYT}(\mu \setminus \lambda)$, entonces definimos la *palabra de la i-ésima fila de T* por

$$w^i(T) = T(i,\lambda_i + 1)T(i,\lambda_i + 2)\cdots T(i,\mu_i), \quad 1 \leq i \leq r$$

donde $r = \ell(\mu)$, y la *palabra fila de T* como

$$w(T) = w^r(T)w^{r-1}(T)\cdots w^1(T).$$

Ejemplo 3.2. Consideremos el tableau T dado por

			1	3	3
		1	2	4	6
1	1	2			
2	3				

Entonces tenemos que

$$w(T) = 231121246133.$$

Observaciones.

1. Si $w = w(T)$ es la palabra obtenida a partir de un tableau de forma $\lambda \in \mathrm{Par}$, es fácil recuperar T a partir de w. Simplemente rompemos la palabra donde suceden dos letras consecutivas en orden decreciente de izquierda a derecha. Esto nos dará las palabras de las filas de T, de abajo hacia arriba. En el Ejemplo 3.1 tenemos

$$56|44|2335|11233,$$

que corresponde a las palabras de las filas de T. Notemos que las subpalabras[1] siempre tienen largo débilmente creciente.

2. No toda palabra w es la palabra de un tableau de forma $\lambda \in \mathrm{Par}$. Por ejemplo, no existe una partición ν y un tableau $U \in \mathrm{SSYT}(\nu)$ tal que $w(U) = 231121246133$. De haberla, al romper la palabra como en el inciso anterior, obtendríamos

$$23|112|1246|133$$

y las subpalabras no tienen largo creciente.

3. Incluso si las subpalabras de w obtenidas como en el inciso 1 tienen largo creciente, podría no existir un tableau T cuya palabra sea w. Por ejemplo, la palabra $w = 1212$ no proviene de un tableau. En efecto, de ser así, al romper la palabra, tendríamos $w = 12|22$ y al reconstruir el posible tableau, tendríamos el arreglo

1	2
2	2

que no es un tableau de Young semi-estándar.

4. Toda palabra es la palabra de al menos un tableau sobre un skew-diagrama. En efecto, sea w una palabra arbitraria, y la rompemos como en el inciso 1, obteniendo subpalabras $w = w_n|w_{n-1}|\cdots|w_1$. Definimos las particiones λ y μ por

$$\mu_i = \sum_{j=i}^{n} \ell(w_i) \quad \text{y} \quad \lambda_i = \sum_{j=i+1}^{n} \ell(w_i), \quad \text{para } 1 \leq i \leq n.$$

[1] Pienso que es claro por contexto el significado de subpalabra, sin embargo, dejaré al lector la tarea de formular una definición rigurosa de este concepto.

Es claro que $\lambda \subseteq \mu$. Escribamos $w_i = x_1^i x_2^i \cdots x_{\ell(w_i)}^i$, y definimos un tableau $T \in \mathrm{SSYT}(\mu \setminus \lambda)$ como sigue. Para cada $1 \leq i \leq n$ y cada $\lambda_i + 1 \leq j \leq \mu_i$,

$$T(i,j) = x_{j-\lambda_i}^i.$$

Entonces tenemos que $w = w(T)$. Por ejemplo, consideremos la palabra $w = 231121246133$, entonces al romper la palabra obtenemos $w = 23|112|1246|133$, las particiones descritas son $\lambda = (8,5,2)$ y $\mu = (11,8,5,2)$ y el tableau T descrito aquí es

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & & & \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{3} \\
 & & & & & \boxed{2} & \boxed{4} & \boxed{6} & & & \\
 & & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{2} & & & & & & \\
\boxed{2} & \boxed{3} & & & & & & & & &
\end{array}$$

5. Sin embargo, a una palabra se le puede asociar más de un tableau sobre un skew-diagrama. Compare el ejemplo en el inciso anterior con el Ejemplo 3.2. Ambos tableaux tienen la misma palabra.

3.2. Transformaciones de Knuth

Vamos a estudiar cuál es el efecto de aplicar el algoritmo de inserción por filas a un tableau en su palabra fila. Sea T un tableau de forma λ y sean $w_1, \ldots, w_n$ las palabras de las filas de T. Supongamos que en cierta iteración del algoritmo de inserción de filas vamos a insertar la letra x en la fila i. Para hacer esto, lo que hacemos identificar la letra x' más izquierda en la palabra w_i con la propiedad de que $x < x'$. Esto significa descomponer a la palabra w_i en la forma $w_i = u \cdot x' \cdot v$, donde todas las entradas de u son no mayores a x, además $x' > x$ y todas las letras de v son no menores a x'. Entonces en el nuevo tableau, la nueva palabra de la i-ésima fila se vuelve $w_i' := u \cdot x \cdot v$ y x' es expulsado hacia la palabra de la siguiente fila.

De este modo, podemos escribir el proceso como sigue:

$$w_n \cdot w_{n-1} \cdot \cdots \cdot w_{i+1} \cdot w_i \cdot x \cdot w_{i-1}' \cdot \cdots \cdot w_1' \mapsto w_n \cdot w_{n-1} \cdot \cdots \cdot w_{i+1} \cdot x' \cdot w_i' \cdot w_{i-1}' \cdot \cdots \cdot w_1'$$

Para escribir esto de manera más compacta, dada una palabra w y una letra x decimos que $v \leq x$ si cada letra de v es más no mayor que x. De manera similar se definen $v < x$, $v \geq x$ y $v > x$. Entonces, la operación básica del algoritmo de Schensted se lee como

$$(u \cdot x' \cdot v) \cdot x \mapsto x' \cdot (u \cdot x \cdot v), \quad u \leq x < x' \leq v.$$

Podemos refinar aún más este proceso. Escribamos $u = u_1 \ldots u_p$ y $v = v_1 \cdots v_q$. La idea consiste en agregar x al final de la palabra $ux'v$ y compararla con la última letra de v, que es v_q. Si x es no menor a v_q, simplemente la agregamos al final, caso contrario, intercambiamos sus posiciones y repetimos el proceso con x y v_{q-1}. Así:

$$\begin{aligned}
ux'vx = ux'v_1 \cdots v_{q-2}v_{q-1}v_q x &\mapsto ux'v_1 \cdots v_{q-2}v_{q-1}xv_q && x < v_{q-1} \leq v_q \\
&\mapsto ux'v_1 \cdots v_{q-2}xv_{q-1}v_q && x < v_{q-2} \leq v_{q-1} \\
&\vdots \\
&\mapsto ux'v_1xv_2 \cdots v_{q-1}v_q && x < v_1 \leq v_2
\end{aligned}$$

$$\mapsto ux'xv_1v_2\cdots v_{q-1}v_q \qquad\qquad x < x' \leq v_1.$$

Llegados a este punto, x ocupará la posición de x' y ahora x' se empezará a mover hacia la izquierda, comparándola con la última letra de u, que es u_p, estás se intercambiarán y luego x' se intercambiará con u_{p-1} y así sucesivamente hasta que x' se encuentre a la izquierda de u_1. Así:

$$\begin{aligned}
ux'xv = u_1\cdots u_{p-2}u_{p-1}u_px'xv &\mapsto u_1\cdots u_{p-2}u_{p-1}x'u_pxv && u_p \leq x < x' \\
&\mapsto u_1\cdots u_{p-2}x'u_{p-1}u_pxv && u_{p-1} \leq u_p < x' \\
&\vdots \\
&\mapsto u_1x'u_2u_3\cdots u_{p-1}u_pxv && u_2 \leq u_3 < x' \\
&\mapsto x'u_1u_2\cdots u_{p-1}u_pxv && u_1 \leq u_2 < x'
\end{aligned}$$

Notamos que en cada etapa, sólo hay tres letras involucradas, y las demás mantienen su posición. Esto motiva la siguiente definición

Definición. Una *transformación elemental de Knuth* es la aplicación, a una palabra w, de una de las siguiente reglas o sus inversas a tres letras consecutivas de la palabra w:

(K1) $yzx \mapsto yxz$, si $x < y \leq z$;

(K2) $xzy \mapsto zxy$, si $x \leq y < z$.

Mnemotécnicamente, podemos recordar estas reglas del siguiente modo: (K1) equivale a obtener la palabra del tableau

$$\begin{array}{|c|c|}\hline y & z \\ \hline\end{array} \leftarrow x = \begin{array}{|c|c|}\hline x & z \\ \hline y \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad x < y \leq z,$$

mientras que (K2) corresponde a

$$\begin{array}{|c|c|}\hline x & z \\ \hline\end{array} \leftarrow y = \begin{array}{|c|c|}\hline x & y \\ \hline z \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad x \leq y < z,$$

Definición. Dos palabras w y w' se dicen *Knuth-equivalentes* si existe una sucesión finita $w = w_0, w_1, \ldots, w_r = w'$ tales que cada w_i se obtiene de w_{i-1} aplicando una transformación elemental de Knuth, para $1 \leq i \leq r$. En este caso escribimos $w \equiv w'$.

Observación. Es claro de la definición que $\equiv$ es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las palabras. La relación es claramente reflexiva y transitiva, y es simétrica pues cada operación elemental de Knuth tiene su inversa.

Todo lo que hemos hecho hasta el momento, tiene la siguiente consecuencia.

Teorema 3.3. *Sea $T \in \mathrm{SSYT}$ un tableau y x un entero positivo. Entonces*

$$w(T \leftarrow x) \equiv w(T) \cdot x.$$

3.3. Monoides

Para esto, vamos a recordar primero lo que es un monoide.

Definición. Un *monoide* es un conjunto M equipado con una *ley de composición interna*, es decir, una operación

$$\begin{array}{rcl} M \times M & \to & M \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$$

que verifica las siguientes propiedades:

- *Asociatividad:* Para todo $x, y, z \in M$ se tiene
$$(xy)z = x(yz).$$
- *Existencia del neutro:* Existe un elemento $e \in M$ tal que para todo $x \in M$ se tiene
$$ex = xe = x.$$

Por ejemplo, todo grupo es un monoide. Si R es un anillo conmutativo con unidad, entonces $(R, \cdot)$ es un monoide. Al igual que en el caso de grupos, el neutro es único: Si $e, e' \in M$ son dos neutros, entonces

$$e = ee' = e'.$$

Sea X un conjunto cualquiera. Podemos asociar a X un monoide, llamado el *monoide libre sobre* X y denotado por F_X, como sigue: Sus elementos son sucesiones finitas $(x_1, \ldots, x_n)$, con $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, de elementos $x_i \in X$ (en particular, si $n = 0$ obtenemos la sucesión vacía). Para ahorrar escritura, denotaremos por $x_1 \cdots x_n$ a la sucesión $(x_1, \ldots, x_n)$. La operación de F_X es yuxtaposición, es decir

$$(x_1 \cdots x_n)(y_1 \cdots y_m) = x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_m.$$

Esta operación es manifiestamente asociativa y tiene como neutro a la palabra vacía, de modo que F_X es un monoide.

Es claro que si $Y \subseteq X$, entonces $F_Y \subseteq F_X$ y además que la ley de composición interna en F_Y es heredada por la de F_X (ambas son yuxtaposición).

Dado un monoide M, una relación de equivalencia $\sim$ sobre M se dice una *congruencia* si verifica la siguiente propiedad: Para todo $t, u, v, w \in M$,

$$(t \sim u \quad \text{y} \quad v \sim y) \Longrightarrow (tv \sim uy \quad \text{y} \quad vt \sim yu).$$

Si $\sim$ es una congruencia sobre M, el conjunto cociente $M/\sim$ tiene una estructura natural de monoide: Si $[x]$ denota a la clase de equivalencia representada por x, entonces

$$[x][y] = [xy], \quad \text{para todo } x, y \in M.$$

Además, en este caso, la aplicación canónica $\pi : M \to M/\sim$ dada por $\pi(x) = [x]$ para todo $x \in M$, es un *homomorfismo de monoides*, lo que significa que, para todo $x, y \in M$, se verifica

$$\pi(xy) = \pi(x)\pi(y).$$

Más aún, tenemos la siguiente *propiedad universal*: Si N es otro monoide y $f : M \to N$ es un homomorfismo de monoides tal que para todo $x, y \in M$ se verifica

$$x \sim y \Longrightarrow f(x) = f(y),$$

entonces existe un único homomorfismo de monoides $\overline{f} : M/\sim \to N$ tal que $\overline{f} \circ \pi = f$. En efecto, claramente $\overline{f}$ está definido por $\overline{f}([x]) = f(x)$. Los detalles de que $\overline{f}$ está bien definido y satisface las propiedades mencionadas es un ejercicio sencillo que dejo al lector.

Dado un monoide M, sea $\mathbb{Z}M$ el grupo abeliano libre con base M. Sus elementos son sumas formales finitas

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

donde $a_i \in \mathbb{Z}$ y $x_i \in M$. El grupo $\mathbb{Z}M$ tiene una estructura natural de anillo con unidad, dada por

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j x_i y_j.$$

A este anillo lo denotamos por $\mathbb{Z}[M]$ y lo llamamos el *anillo de monoide* sobre M.

3.4. El monoide pláxico

El conjunto W de palabras es un monoide libre sobre $\mathbb{Z}_{>0}$. La relación de equivalencia de Knuth $\equiv$ es claramente una congruencia: Si $u \equiv u'$ y $v \equiv v'$, existen sucesiones $u = u_0, u_1, \ldots, u_n = u'$ y $v = v_0, v_1 \ldots, v_m = v'$ tales que u_i (resp. v_i) se obtiene a partir de u_{i-1} (res. v_{i-1}) mediante una transformación elemental de Knuth, para todo i. Entonces la sucesión

$$uv = u_0v_0, u_0v_1, u_0v_2, \ldots u_0v_m, u_1v_m, u_2v_m, \ldots, u_nv_m = u'v'$$

muestra que $uv \equiv u'v'$. Similarmente tenemos que $vu \equiv v'u'$, lo que prueba que $\equiv$ es una congruencia sobre W.

Definición (Lascoux-Schützenberger)**.** El *monoide pláxico* es el monoide definido por el cociente $M = W/\equiv$.

Abusando de lenguaje, escribiremos w para la clase de equivalencia en $M = W/\equiv$ representada por $w \in W$. Dada una palabra $w = x_1 \cdots x_n \in W$, definimos

$$m_i(w) = \#\{j \mid x_j = i\},$$

es decir, $m_i(w)$ es el número de veces que aparece la letra i en w. Si $w = w(T)$ para un tableau de Young semi-estándar T, entonces es claro que

$$m_i(w) = m_i(T), \quad \text{para todo } i = 1, 2, \ldots.$$

Además, claramente las transformaxiones de Knuth sólo tienen el efecto de una permutación en las letras de una palabra, lo que significa que si $w \equiv w'$, entonces

$$m_i(w) = m_i(w'), \quad \text{para todo } i = 1, 2, \ldots.$$

Con esto en mente, consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{Z}[M] & \to & \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots] \\ & w & \mapsto & x^w \end{array}$$

donde $x^w = x_1^{m_1(w)} x_2^{m_2(w)} \cdots$. Esta aplicación está bien definida por el razonamiento precedente.

3.5. Sucesiones crecientes

Sea $w = x_1x_2\cdots x_n$ una palabra. Definimos el número $L(w,1)$ como el entero positivo ℓ más grande con la siguiente propiedad: Existen índices $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell \le n$ tales que

$$x_{i_1} \le x_{i_2} \le \cdots \le x_{i_\ell}.$$

Más coloquialmente, $L(w,1)$ es el mayor largo de una sucesión (débilmente) creciente maximal contenida en w.

De manera más general, definimos $L(w,k)$ como el número entero más grande que puede escribirse como suma de los largos de k sucesiones disjuntas débilmente crecientes contenidas en w.

Ejemplo 3.4. Consideremos la palabra

$$w = 12434122423.$$

En la siguiente tabla mostramos los números $L(w,k)$ asociados a esta palabra, junto con ejemplos de sucesiones usadas para obtener dichos números.

$L(w,1)=6$	1	2	4	3	4	1	2	2	4	2	3
$L(w,2)=10$	1	2	4	3	4	1	2	2	4	2	3
$L(w,3)=11$	1	2	4	3	4	1	2	2	4	2	3

Además, $L(w,k) = 11$ para $k \ge 3$ (tomando sucesiones vacías, por ejemplo).

Notemos que existe más de una manera de obtener las sucesiones que realizan a los números $L(w,k)$. Por ejemplo, el número $L(w,1) = 6$ también puede obtenerse tomando la sucesión

$$1 \; 2 \; 4 \; 3 \; 4 \; 1 \; 2 \; 2 \; 4 \; 2 \; 3.$$

Proposición 3.5. *Sea $\lambda = (\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n \ge \lambda_{n+1} = 0 = \cdots)$ una partición y sea $T \in \mathrm{SSYT}(\lambda)$. Si $w = w(T)$, entonces*

$$L(w,k) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$$

para todo $k \ge 1$.

Demostración. Notemos que las palabras filas $w^i(T)$ para $i = 1,\ldots,k$ forman k sucesiones crecientes disjuntas en w, de modo que

$$L(w,k) \ge \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k.$$

Recordemos que $w = w^n(T)w^{n-1}(T)\cdots w^1(T)$. Ahora, supongamos que extraemos k sucesiones crecientes disjuntas de w. Esto corresponde a seleccionar k subconjuntos disjuntos del conjunto de cajas de λ, donde en cada subconjunto no pueden existir dos cajas en la misma columna. En efecto, si para cierto tal subconjunto hubiesen dos cajas en la misma columna, digamos, en la columna j, en filas $i < i'$. Entonces $T(i,j) < T(i',j)$ pues T es estrictamente creciente por columnas, y $T(i,j)$ es una letra en $w^i(T)$ y $T(i',j)$ es una letra en $w^{i'}(T)$, pero $w^{i'}(T)$ aparece a la izquierda de $w^i(T)$ en w, lo que implica que la sucesión asociada a este subconjunto no puede ser creciente. Luego, cada columna de λ contiene a lo más k cajas de algunos de a unión de estos subconjuntos. Estas cajas pueden inyectarse en las primeras k filas de λ. Entonces, si estas k sucesiones crecientes realizan a $L(w,k)$, tenemos que

$$L(w,k) \le \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k,$$

lo que completa la demostración. □

De hecho el argumento de esta demostración muestra algo más:

Porisma 3.6. *Sea λ una partición y $T \in \mathrm{SSYT}$. Si $w = w(T)$ y k es un entero positivo, las k sucesiones crecientes disjuntas que realizan al número $L(w,k)$ se obtienen como las palabras de las k primeras filas en T.*

Proposición 3.7. *Si dos palabras w y w' son Knuth-equivalentes, entonces, para todo $k \geq 1$ tenemos*

$$L(w,k) = L(w',k).$$

Demostración. Por inducción, basta probar el caso cuando w' se obtiene de w a partir de una transformación elemental de Knuth. Existen dos casos a considerar:

1. $w = u \cdot yxz \cdot v$ y $w' = u \cdot yzx \cdot v$, con $x < y \leq z$; o

2. $w = u \cdot xzy \cdot v$ y $w' = u \cdot zxy \cdot v$, con $x \leq y < z$,

donde u, v son palabras, posiblemente vacías. Si una sucesión es creciente en w', la sucesión formada por las mismas letras es también creciente en w. En efecto, si esta sucesión contiene a x pero no a z o viceversa, esto es obvio, y no puede contener a ambas pues zx no es creciente. Esto prueba que

$$L(w,k) \geq L(w',k).$$

Para probar la otra desigualdad, supongamos que extraemos k sucesiones disjuntas crecientes de w. Si ninguna de estas sucesiones contiene simultáneamente a x y a z, entonces las mismas sucesiones forman una familia de k sucesiones disjuntas en w'. Entonces supongamos una de las sucesiones crecientes es de la forma $u' \cdot xz \cdot v'$ donde u' y v' contienen letras de u y v, respectivamente. Notemos que tal sucesión claramente no puede contener a y. Existen dos posibilidades:

- y no aparece en ninguna otra de las k sucesiones. En este caso, reemplazamos la sucesión $u' \cdot xz \cdot v'$ por la sucesión $u' \cdot yz \cdot v'$ en el caso 1 o por $u' \cdot xy \cdot v'$ en el caso 2, y dejamos las sucesiones restantes inalteradas, con lo que obtenemos k sucesiones crecientes disjuntas con los mismos largos para w'.

- y aparece en otra sucesión creciente $u'' \cdot y \cdot v''$. En el caso 1 sustituimos las dos sucesiones $u' \cdot xz \cdot v'$ y $u'' \cdot y \cdot v''$ por las sucesiones $u' \cdot x \cdot v''$ y $u'' \cdot yz \cdot v'$. En cambio, en el caso 2, sustituimos las dos sucesiones $u' \cdot xy \cdot v''$ y $u'' \cdot z \cdot v'$. Las demás $k-2$ sucesiones permanecen inalteradas. Entonces obtenemos nuevamente k sucesiones crecientes disjuntas en la palabra w', y la suma de sus largos es la misma que dicha suma en las sucesiones de la palabra w.

Concluimos entonces que

$$L(w,k) \leq L(w',k),$$

lo que completa la demostración. □

3.6. El teorema fundamental

Con lo que hemos visto hasta este momento, estamos en capacidad de enunciar y demostrar el primer teorema profundo en este curso.

Primero, recordemos que si T es un tableau de Young semi-estándar y si x es un entero no negativo, entonces

$$w(T \leftarrow x) \equiv w(T) \cdot x. \tag{1}$$

Sea $w = x_1x_2\cdots x_n$ una palabra y definamos por inducción $T_0 = \emptyset$ y $T_{j+1} = T_j \leftarrow x_{j+1}$ para $1 \leq j \leq n-1$. Entonces, aplicado repetidamente (1) para obtener

$$\begin{aligned}
w(T_n) =& w(T_{n-1} \leftarrow x_n) \equiv w(T_{n-1}) \cdot x_n \\
=& w(T_{n-2} \leftarrow x_{n-1}) \cdot x_n \equiv w(T_{n-2}) \cdot x_{n-1}x_n \\
& \vdots \\
=& w(T_0 \leftarrow x_1) \cdot x_2 \cdots x_n \equiv w(T_0) \cdot x_1x_2\cdots x_n \\
=& w,
\end{aligned}$$

lo que muestra que $w \equiv w(T_n)$. Esto prueba que toda palabra es Knuth-equivalente a la palabra de un tableau de Young semi-estándar sobre una partición (no un skew-diagrama).

Lo sorprendente, es que el tableau $T = T_n$ está completamente determinado por w:

Teorema 3.8. *Toda palabra es Knuth-equivalente a la palabra de un único tableau de Young semi-estándar.*

Demostración. Sea w una palabra y sean T y U dos tableaux semi-estándar tales que $w(T) \equiv w \equiv w(U)$. Probaremos que $T = U$ procediendo por inducción sobre $\ell(w)$. Si w es una sola letra, la conclusión es obvia. Supongamos entonces que w tiene más de una letra. Primero, notemos que si $T \in \mathrm{SSYT}(\lambda)$ y $U \in \mathrm{SSYT}(\mu)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= L(w(T), k) - L(w(T), k-1) \\
&= L(w, k) - L(w, k-1) \\
&= L(w(U), k) - L(w(U), k-1) \\
&= \mu_k,
\end{aligned}$$

para todo $k \geq 1$, por lo que $\lambda = \mu$ y así T y U tienen la misma forma.

Para cualquier palabra v, sea v' la palabra que resulta de eliminar la ocurrencia más derecha de la letra más grande de v. Sean T' u U' los tableaux obtenidos a partir de T y U, respectivamente, al eliminar la ocurrencia más derecha de la caja con mayor contenido en cada uno. Es claro entonces que $w(T') = w(T)'$ y $w(U') = w(U)'$. Probaremos que $w(T') \equiv w' \equiv w(U')$. Para esto, basta probar lo siguiente: Si dos palabras u y v son Knuth-equivalentes, entonces u' y v' son Knuth equivalentes, y esto es trivial. Así, por hipótesis de inducción tenemos que $U' = T'$ y dado que U y T tienen la misma forma y difieren de U' y T' por exactamente una caja con la misma entrada, se sigue que $T = U$. □

4. Una aplicación: El teorema de Erdős-Szekeres

Vamos a presentar una aplicación de la teoría desarrollada hasta el momento. Se trata del famoso teorema de Erdős-Szekeres[2].

Teorema 4.1 (Erdős-Szekeres)**.** *Sean n un entero positivo. Toda palabra de largo n^2+1 contiene una sucesión creciente de largo $n+1$ o una sucesión estrictamente decreciente de largo $n+1$.*

[2]En serio es un teorema muy famoso, si no ha escuchado de él, debería cuestionarse seriamente lo que ha hecho de su vida hasta este momento (¡nah!, es broma XD).

Necesitaremos varios resultados preliminares. Primero, si w es una palabra, sea $R(w,k)$ el mayor número entero que puede realizarse como la suma de los largos de k sucesiones estrictamente decrecientes disjuntas construidas con las letras de w. Entonces tenemos

Lema 4.2. *Si $T \in \mathrm{SSYT}(\lambda)$ para cierta partición λ y $w = w(T)$, entonces*

$$R(w,k) = \lambda'_1 + \lambda'_2 + \cdots + \lambda'_k.$$

Más aún, los números $R(w,k)$ se realizan como la suma de los largos de las sucesiones correspondientes a las primeras k columnas de T.

Demostración. Análoga a la de su contraparte para los números $L(w,k)$, por lo que se deja como ejercicio para el lector. □

Lema 4.3. *Si dos palabras w y w' son Knuth-equivalentes, entonces*

$$R(w,k) = R(w',k)$$

para todo $k \geq 1$.

Demostración. Análoga a su contraparte para los números $L(w,k)$, por lo que también se deja como ejercicio para el lector. □

Demostración del teorema de Erdős-Szekeres. Supongamos que m y n son enteros positivos y que w es una palabra de largo $mn+1$. Sea T el único tableau tal que $w \equiv w(T)$ y sea λ la forma de T. Entonces

$$L(w,1) = \lambda_1 \quad \text{y} \quad R(w,1) = \lambda'_1 = \ell(\lambda)$$

Si $\lambda_1 \leq m$ y $\lambda'_1 \leq n$, dado que el diagrama de λ tiene a lo más $\lambda_1 \cdot \lambda'_1$ cajas, se sigue que w debe tener a lo más $\lambda_1 \cdot \lambda'_1 \leq mn$ letras, lo que es contrario a la condición de que w tiene $mn+1$ letras. Por lo tanto $\lambda_1 \geq m+1$ o $\lambda'_1 \geq n+1$, lo que significa que o bien w contiene una sucesión creciente de largo $m+1$ o una sucesión estrictamente decreciente de largo $n+1$.

El teorema se sigue al considerar $m = n$. □

Notemos que el argumento de la demostración de hecho prueba algo más general:

Porisma 4.4. *Si m y n son enteros positivos y w es una palabra de largo $mn+1$, entonces w contiene una sucesión creciente de largo $m+1$ o una sucesión estrictamente decreciente de largo $n+1$.*

Observación. El teorema de Erdős-Szekeres es *justo* para todo n, es decir, no se puede mejorar el largo de la palabra a un número menor a n^2+1 para obtener una sucesión creciente o estrictamente decreciente de largo $n+1$. Para mostrar esto, consideremos las palabras

$$w_i = (in)(in-1)(in-2)\cdots(in-n+1), \quad 1 \leq i \leq n$$

y sea $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \cdots \cdot w_n$. Toda sucesión creciente en w no puede contener dos letras de la misma w_i, pues cada w_i es decreciente, de modo que toda sucesión creciente en w contiene a lo más una letra de cada w_i y por ende tiene largo a lo más n, así la sucesión creciente de mayor largo, tendrá largo no mayor a n. Ahora, ninguna sucesión estrictamente decreciente de w puede contener letras de dos w_i's distintas, pues todas las letras de w_{i+1} son estrictamente mayores a las de w_i, de modo que el largo de una sucesión estrictamente decreciente no puede exceder al largo de una subpalabra w_i, que es n.

En el caso anterior, w tiene largo n^2 y no tiene sucesiones crecientes ni estrictamente decrecientes de largo $n+1$, así que el teorema de Erdős-Szekeres es óptimo.