



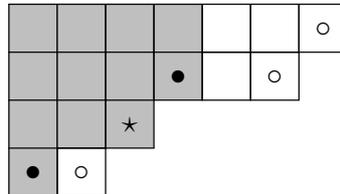
5. Algoritmo de Schützenberger: *jeu de taquin*

5.1. El algoritmo

Presentaremos otro algoritmo, que inicia con un skew-tableau y produce un tableau de Young semi-estándar. Para esto, necesitamos un par de definiciones.

Definición. Sea $\lambda \setminus \mu$ un skew-diagrama. Una caja $(i, j) \in \mu$ se dice una *esquina interior* si $(i+1, j) \notin \mu$ y $(i, j+1) \notin \mu$. Una caja $(i, j) \in \lambda$ se dice una *esquina exterior* si $(i+1, j) \notin \lambda$ y $(i, j+1) \in \lambda$.

Ejemplo 5.1. Consideremos el skew-diagrama $\lambda \setminus \mu$, con $\lambda = (7, 6, 3, 2)$ y $\mu = (4, 4, 3, 1)$:



Las cajas marcadas con \bullet son esquinas interiores; las cajas marcadas con \circ son esquinas exteriores; y la caja marcada con \star es a la vez esquina interior y exterior.

Definición. Sea $\lambda \setminus \mu$ un skew-diagrama y sea $A \subseteq \lambda \setminus \mu$ un conjunto de cajas en $\lambda \setminus \mu$. Sea $T : A \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ una función. Sea (i, j) una caja en $\lambda \setminus A$. Definimos el *vecino más pequeño* de (i, j) del siguiente modo:

- Si las cajas $(i+1, j)$ y $(i, j+1)$ están ambas en A , y $T(i+1, j) > T(i, j+1)$, el vecino más pequeño de (i, j) es $(i, j+1)$.
- Si las cajas $(i+1, j)$ y $(i, j+1)$ están ambas en A , y $T(i+1, j) \leq T(i, j+1)$, el vecino más pequeño de (i, j) es $(i+1, j)$.
- Si la caja $(i+1, j)$ está en A pero no $(i, j+1)$, el vecino más pequeño de (i, j) es $(i+1, j)$.
- Si la caja $(i, j+1)$ está en A pero no $(i+1, j)$, el vecino más pequeño de (i, j) es $(i, j+1)$.
- Si ninguna de las cajas $(i+1, j)$ y $(i, j+1)$ están en A , entonces (i, j) no tiene un vecino más pequeño.

Con esto, podemos presentar el algoritmo principal de esta sección, que se conoce como *algoritmo de Schützenberger* o también *deslizamiento*.

Algoritmo 5.2 (Algoritmo de Schützenberger). Sea $T \in \text{SSYT}(\lambda \setminus \mu)$ con $\mu \subseteq \lambda$ particiones.

1. Seleccione una esquina interior, a la que llamaremos *caja vacía* o *agujero*.
2. Removemos la entrada del vecino más pequeño de la caja vacía y lo colocamos en esta.

El vecino más pequeño será la nueva caja vacía.

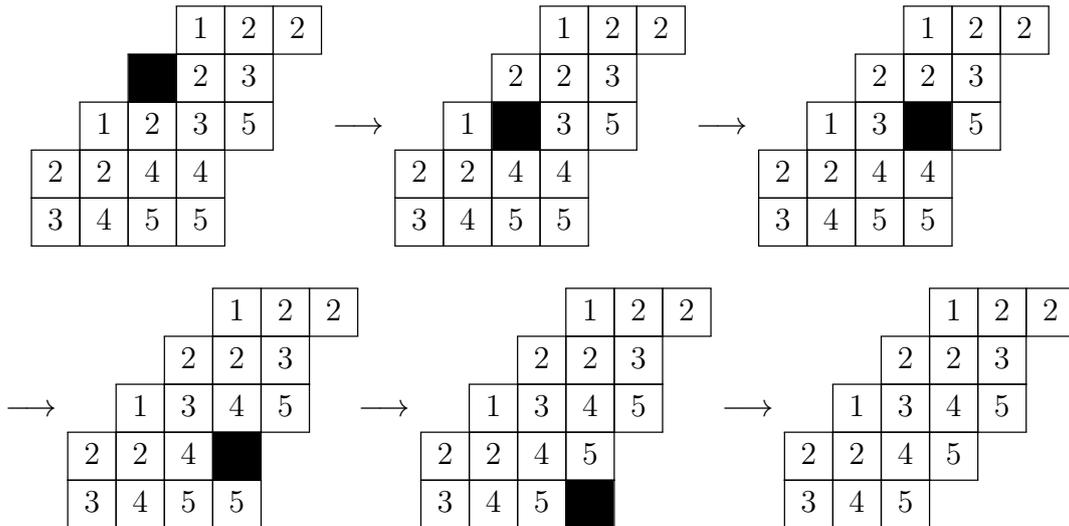
3. Repetimos el paso 2 hasta que la caja vacía no tenga vecinos más pequeños.
4. Cuando la caja vacía no tenga vecino más pequeños, eliminamos la caja vacía del diagrama.

Observación. Si una caja no tiene vecino más pequeño en alguna etapa del algoritmo de Schützenberger, es porque es una esquina exterior. Recíprocamente, toda esquina exterior carece de un vecino más pequeño.

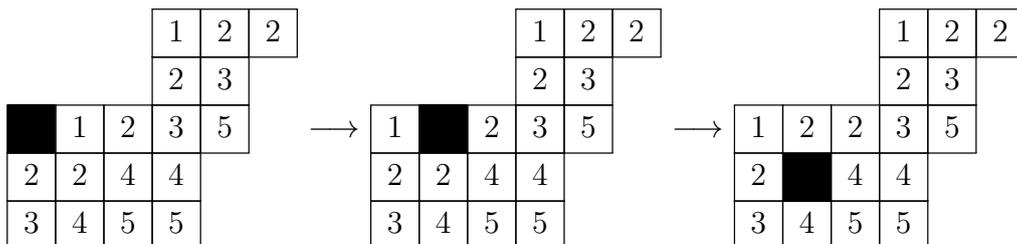
Ejemplo 5.3. Consideremos el tableau

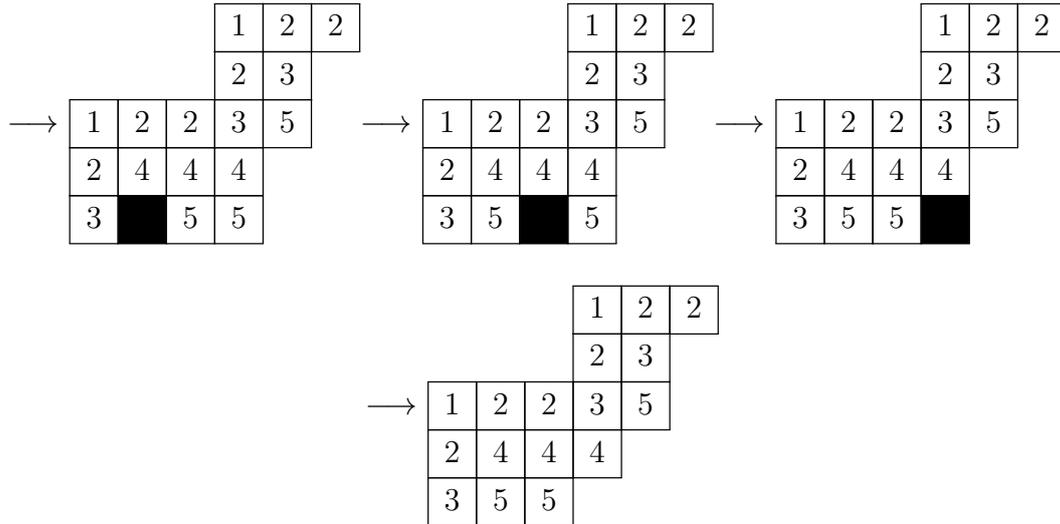
			1	2	2
			2	3	
		1	2	3	5
	2	2	4	4	
3	4	5	5		

Las esquinas interiores en este caso están en las posiciones $(2, 3)$ y $(3, 1)$. Si aplicamos el algoritmo de Schützenberger a la esquina interior $(2, 3)$, tenemos



También podemos aplicar el algoritmo de Schützenberger iniciando en la esquina interior $(3, 1)$, en cuyo caso obtenemos

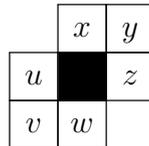




Observación. El algoritmo de Schützenberger es reversible: Si conocemos el resultado del mismo, junto con la caja que fue removida, podemos realizar el proceso hacia atrás para obtener el tableau original junto la esquina interior con la que inició el proceso.

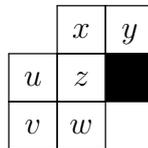
Proposición 5.4. *El resultado de aplicar el algoritmo de Schützenberger a un tableau $T \in \text{SSYT}(\lambda \setminus \mu)$ es un tableau de Young semi-estándar sobre un skew-diagrama.*

Demostración. Dado que el proceso inicia en una esquina interior y termina removiendo una esquina exterior, es claro que al final obtendremos un skew-diagrama. Lo que debemos hacer es probar que en cada etapa del algoritmo, las filas se mantienen débilmente crecientes y las columnas estrictamente crecientes. Consideremos la porción del diagrama donde *sucede la acción*. Es posible que algunas de estas cajas no aparezcan en el diagrama, pero necesariamente z y/o w lo hacen.



Entonces dos cosas pueden ocurrir:

- Si $z < w$ o si no existe w . En este caso, el algoritmo de Schützenberger produce



Las palabras de cada fila permanecen inalteradas, por lo que el diagrama tiene filas débilmente crecientes. La tercera columna en esta porción claramente continúa siendo estrictamente creciente, al igual que la primera. Debemos analizar lo que sucede en la columna del centro. Notemos que en el diagrama original tenemos $x \leq y < z$, de donde $x < z$ y por hipótesis $z < w$ o no existe w , de modo que la columna del centro es estrictamente creciente.

- Si $w \leq z$ o no existe z . En este caso obtenemos

	x	y
u	w	z
v		

Las palabras de cada columna (pienso que es obvio lo que entendemos por palabra de una columna en este caso) se mantienen inalteradas, por lo que las columnas siguen estrictamente crecientes. La primera y tercera fila claramente permanecen débilmente crecientes, por lo que sólo debemos analizar lo que sucede en la fila central. En el diagrama original tenemos que $u < v \leq w$ y por ende $u < w \leq z$ si existe z o $u < w$ en caso contrario y tenemos que la segunda fila es débilmente creciente.

Así, en cualquier etapa del algoritmo, las filas se mantienen débilmente crecientes y las columnas estrictamente crecientes, como se deseaba. \square

5.2. Equivalencia de Knuth y deslizamientos

Ahora probaremos el resultado central de esta sección:

Teorema 5.5. *Sea $T \in \text{SSYT}(\lambda \setminus \mu)$ y sea U el tableau resultante al aplicar el algoritmo de Schützenberger a T iniciando en alguna esquina interior. Entonces las palabras $w(T)$ y $w(U)$ son Knuth-equivalentes.*

Demostración. Dado un skew-diagrama $\lambda \setminus \mu$ y un subconjunto de cajas $A \subseteq \lambda \setminus \mu$, definimos la palabra de un “tableau” $T : A \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ de manera análoga al caso de un tableau: en este caso si una caja no posee ninguna entrada, la interpretamos como una palabra vacía y concatenamos de manera usual.

Establecida esta convención, lo que debemos probar es que en cada etapa del algoritmo¹ de Schützenberger las palabras se mantienen Knuth-equivalentes. Si el deslizamiento es horizontal, no hay nada que probar, pues en este caso la palabra se mantiene inalterada. Por lo tanto, debemos preocuparnos de cuando se produce un deslizamiento vertical. En este caso el deslizamiento se realizará desde una fila i hacia la fila $i + 1$, y en las filas restantes la palabra de cada una de éstas se mantendrá inalterada. Dado que la relación de equivalencia de Knuth es una congruencia sobre el monoide de palabras W , basta analizar lo que sucede en estas dos filas. Lo que sucede en estas dos filas está representado en el diagrama

				u_1	\dots	\dots	u_p		y_1	\dots	\dots	y_q	a_1	\dots	\dots	a_r
b_1	\dots	\dots	b_s	v_1	\dots	\dots	v_q	x	z_1	\dots	\dots	z_q				

a partir del cual obtenemos

				u_1	\dots	\dots	u_p	x	y_1	\dots	\dots	y_q	a_1	\dots	\dots	a_r
b_1	\dots	\dots	b_s	v_1	\dots	\dots	v_p		z_1	\dots	\dots	z_q				

Dado que el deslizamiento se realiza verticalmente, tenemos que $x \leq y_1$.

¹Ok, esta vez sí fue intencional.

Escribamos

$$u = u_1 \cdots u_p, \quad y = y_1 \cdots y_q, \quad a = a_1 \cdots a_r, \quad b = b_1 \cdots b_s, \quad v = v_1 \cdots v_p, \quad z = z_1 \cdots z_q,$$

de modo que lo que necesitamos probar es que

$$bvxzuya \equiv bvxzya.$$

Nuevamente, dado que la equivalencia de Knuth es una congruencia, basta probar que

$$vxzuy \equiv vxzy. \quad (1)$$

Para probar esta relación, procederemos por inducción sobre p . Para $p = 0$, debemos probar que

$$zxy \equiv xzy.$$

Si insertamos y_1 en la fila con entradas x, z_1, \dots, z_q , es decir,

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline x & z_1 & z_2 & \cdots & z_q \\ \hline \end{array} \leftarrow y_1,$$

entonces y_1 expulsa a z_1 (pues $x \leq y_1$ y $y_1 < z_1$), y dado que el algoritmo de inserción preserva la equivalencia de Knuth, obtenemos

$$xz_1z_2 \cdots z_qy_1 \equiv z_1xy_1z_2 \cdots z_q$$

Insertamos y_2 en esta última palabra, lo que produce que z_2 sea expulsado y obtenemos la equivalencia

$$xz_1z_2 \cdots z_qy_1y_2 \equiv z_1z_2xy_1y_2z_3 \cdots z_q$$

Procediendo recursivamente tenemos que

$$xzy = xz_1 \cdots z_qy_1 \cdots y_q \equiv z_1 \cdots z_qxy_1 \cdots y_q = xzy,$$

lo que prueba el caso $p = 0$. Supongamos ahora que $p \geq 1$ y que el resultado es válido para valores menores a p . Sean $u' = u_2 \cdots u_p$ y $v' = v_2 \cdots v_p$, de modo que $u = u_1u'$ y $v = v_1v'$. Consideramos la palabra

$$vxzuy = v_1v'xzu_1u'y.$$

Insertando u_1 en la fila con palabra $v_1v'xz$, tenemos que u_1 expulsa a v_1 , lo que nos da

$$vxzuy \equiv v_1u_1v'xzu'y. \quad (2)$$

Por hipótesis de inducción tenemos que $v'xzu'y \equiv v'zu'xy$, de donde

$$v_1u_1v'xzu'y \equiv v_1u_1v'zu'xy. \quad (3)$$

Finalmente, al insertar u_1 en la fila con palabra $v_1v'z$ este expulsa a v_1 obteniendo $v_1u_1v'z \equiv v_1v'zu_1$ y por ende

$$v_1u_1v'zu'xy \equiv v_1v'zu_1u'xy = vxzy.$$

Esta última relación, junto con las relaciones (2) y (3) prueban (1). \square

Este teorema, junto con el teorema fundamental en la sección anterior, tienen consecuencias impresionantes, como veremos más adelante.

5.3. Jeu de taquin

Cuando aplicamos el algoritmo de Schützenberger a un tableau sobre un skew-diagrama $\lambda \setminus \mu$, obtenemos un nuevo tableau sobre un nuevo skew-diagrama $\tilde{\lambda} \setminus \tilde{\mu}$ con el mismo número total de cajas, pero con $|\tilde{\mu}| = |\mu| - 1$. Entonces podríamos aplicar nuevamente el algoritmo de Schützenberger, repitiendo esto hasta que al final obtenemos un tableau de Young semi-estándar sobre una partición. Este proceso se conoce como *jeu de taquin*. El nombre proviene de la expresión francesa para el *juego del 15* o *taken*.

Definición. Dado $T \in \text{SSYT}(\lambda \setminus \mu)$ el tableau de Young semi-estándar obtenido por aplicación del jeu de taquin a T se llama la *rectificación* de T y se denota por $\text{Rec}(T)$.

Por ahora tenemos un problema: No sabemos si el orden en el que se eligen las esquinas interiores lleva a producir tableaux distintos tras la aplicación del jeu de taquin. Esto implicaría que la elección de la notación $\text{Rec}(T)$ no es apropiada. Sin embargo, este no es el caso:

Teorema 5.6. Para todo $T \in \text{SSYT}(\lambda \setminus \mu)$, el tableau $\text{Rec}(T)$ está bien definido, es decir, no depende de la elección de las esquinas interiores.

Demostración. Sean U y U' dos rectificaciones de T , es decir, dos tableaux obtenidos a partir de T aplicando el jeu de taquin. Entonces tenemos que

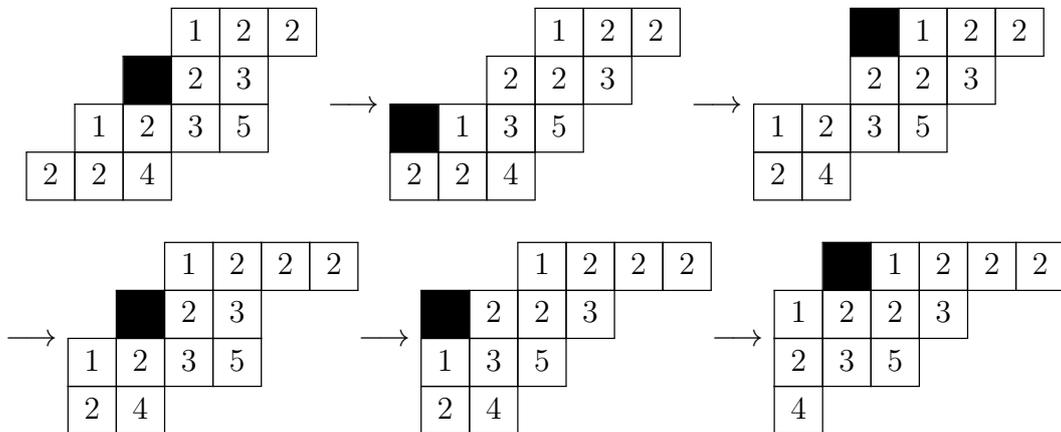
$$w(U) \equiv w(T) \equiv w(U').$$

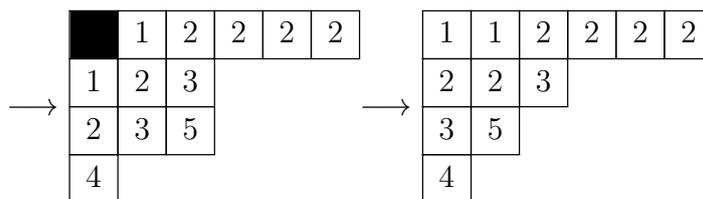
Pero sabemos que una palabra es Knuth equivalente a la palabra de un único tableau de Young-semiestándar sobre una partición, lo que implica que $U = U'$. \square

Ejemplo 5.7. Consideremos el tableau

$$T = \begin{array}{cccc} & & & 1 & 2 & 2 \\ & & & 2 & 3 & \\ & & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & & & \end{array}$$

El siguiente proceso indica el jeu de taquin, donde las cajas negras son las esquinas interiores elegidas en cada aplicación del algoritmo de Schützenberger:





Con esto, tenemos que

$$\text{Rec}(T) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 3 & & & \\ \hline 3 & 5 & & & & \\ \hline 4 & & & & & \\ \hline \end{array} .$$

6. El monoide de tableaux

6.1. Producto de tableaux via el algoritmo de Schensted

Definimos el conjunto de tableaux de Young semiestándard como el conjunto

$$\text{SSYT} = \bigcup_{\lambda \in \text{Par}} \text{SSYT}(\lambda).$$

Nuestro objetivo será el de equipar a SSYT con la estructura de un monoide. Para esto, sean $T, U \in \text{SSYT}$, y sea $w(U) = x_1 x_2 \cdots x_n$ la palabra fila de U . Entonces, definimos recursivamente

$$T_0 = T, \quad T_{j+1} = T_j \leftarrow x_j.$$

Entonces:

Definición. Con la notacion anterior el producto $T \cdot U$ se define por

$$T \cdot U = T_n.$$

Ejemplo 6.1. Consideremos los tableaux

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 3 & & \\ \hline 4 & 4 & 5 & & \\ \hline 5 & 6 & & & \\ \hline \end{array} \quad \text{y} \quad U = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline \end{array},$$

entonces la palabra de U es $w(U) = 34233$ y procedemos: $T_0 = T$,

$$T_1 = T_0 \leftarrow 3 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 3 & & & \\ \hline 4 & 4 & 5 & & & \\ \hline 5 & 6 & & & & \\ \hline \end{array}$$

$$T_2 = T_1 \leftarrow 4 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 3 & & & & \\ \hline 4 & 4 & 5 & & & & \\ \hline 5 & 6 & & & & & \\ \hline \end{array}$$

$$T_3 = T_2 \leftarrow 2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 3 & & & \\ \hline 4 & 4 & 5 & & & & \\ \hline 5 & 6 & & & & & \\ \hline \end{array}$$

$$T_4 = T_3 \leftarrow 3 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & & \\ \hline 4 & 4 & 5 & & & & \\ \hline 5 & 6 & & & & & \\ \hline \end{array}$$

$$T_5 = T_4 \leftarrow 3 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & & & \\ \hline 4 & 4 & 5 & & & & & \\ \hline 5 & 6 & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

De este modo

$$T \cdot U = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & & & \\ \hline 4 & 4 & 5 & & & & & \\ \hline 5 & 6 & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

El lector puede verificar que

$$U \cdot T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 5 \\ \hline 3 & 4 & 4 & & & \\ \hline 4 & 5 & 6 & & & \\ \hline \end{array}$$

lo que muestra que en general $T \cdot U \neq U \cdot T$.

Gran parte de los esfuerzos depositados en este curso han estado orientados a demostrar el siguiente (maravilloso²) teorema

Teorema 6.2. *El conjunto SSYT con la operación \cdot descrita anteriormente es un monoide. El neutro de este monoide es el tableau vacío \emptyset .*

6.2. Producto de tableaux via jeu de taquin

Para demostrar este teorema, reuniremos todos los conocimientos adquiridos a lo largo de estos días. Primero, dados $T, U \in \text{SSYT}$, definimos un skew tableau $T * U$ del siguiente modo: Sea λ la forma de T y μ la forma de U . Entonces la forma de $T * U$ está dada por el skew-diagrama $\nu \setminus \rho$ donde $\rho = (\lambda_1^{\ell(\mu)})$ y

$$\nu_i = \begin{cases} \lambda_1 + \mu_i & \text{para } 1 \leq i \leq \ell(\mu), \\ \lambda_{i-\ell(\mu)} & \text{para } \ell(\mu) + 1 \leq i \leq \ell(\lambda) + \ell(\mu). \end{cases}$$

²Este teorema es maravilloso, si después de todo lo visto hasta el día de hoy no le parece algo maravilloso, debería seriamente reconsiderar lo que ha hecho de su vida los últimos días.

Entonces el skew-tableau $T * U$ está dado por

$$(T * U)(i, j) = \begin{cases} U(i, j - \lambda_1) & \text{para } 1 \leq i \leq \ell(\mu), \\ T(i - \ell(\mu), j) & \text{para } \ell(\mu) + 1 \leq \ell(\lambda) + \ell(\mu). \end{cases}$$

Teorema 6.3. *Si $T, U \in \text{SSYT}$, entonces*

$$T \cdot U = \text{Rec}(T * U).$$

Más aún, $T \cdot U$ es el único tableau de Young semi-estándar cuya palabra es Knuth-equivalente a $w(T) \cdot w(U)$.

Demostración. En este punto esto es prácticamente trivial. Sin embargo, haré un esfuerzo por escribir una demostración. Recordemos que si x es un entero positivo, entonces

$$w(T \leftarrow x) \equiv w(T) \cdot x.$$

Aplicando recursivamente esto a las letras de $w(U)$, obtenemos que

$$w(T \cdot U) \equiv w(T) \cdot w(U).$$

Entonces claramente $T \cdot U$ es el único tableau de Young semi-estándar cuya palabra es Knuth-equivalente a $w(T) \cdot w(U)$. Ahora, es claro que

$$w(T * U) = w(T) \cdot w(U),$$

y sabemos que

$$w(\text{Rec}(T * U)) \equiv w(T * U),$$

de modo que

$$w(\text{Rec}(T * U)) \equiv w(T \cdot U),$$

y dado que existe un único tableaux semi-estándar asociado a cada palabra, se sigue que $\text{Rec}(T * U) = T \cdot U$, como se deseaba. \square

Demostración del teorema maravilloso. Para probar este teorema, necesitamos probar dos afirmaciones:

1. La operación \cdot es asociativa. Es decir, si $T, U, V \in \text{SSYT}$ son tres tableaux, entonces

$$T \cdot (U \cdot V) = (T \cdot U) \cdot V.$$

2. El tableau vacío \emptyset es el neutro de esta operación, es decir, para todo tableau $T \in \text{SSYT}$,

$$T \cdot \emptyset = \emptyset \cdot T = T.$$

Para demostrar 1, basta notar que $T * \emptyset = T = \emptyset * T$ y por ende

$$T = \text{Rec}(T) = \text{Rec}(T * \emptyset) = T \cdot \emptyset,$$

y similarmente $\emptyset \cdot T = T$.

Ahora, notemos que si T, U, V son tres tableaux semi-estándar, entonces $T \cdot U$ es el único tableau de Young semi-estándar cuya palabra es Knuth-equivalente a $w(T) \cdot w(U)$ y por ende $(T \cdot U) \cdot V$ es el único tableau de Young semi-estándar cuya palabra es Knuth-equivalente a $(w(T) \cdot w(U)) \cdot w(V) = w(T) \cdot (w(U) \cdot w(V))$, y esta última palabra es equivalente a la palabra de un único tableau de Young semi-estándar, el mismo que es $T \cdot (U \cdot V)$. De este modo

$$(T \cdot U) \cdot V = T \cdot (U \cdot V),$$

lo que completa la demostración. □

Corolario 6.4. *El monoide pláxico M es isomorfo al monoide de tableaux SSYT.*

Demostración. La aplicación $w : \text{SSYT} \rightarrow M$ dada por $T \mapsto w(T)$ es un homomorfismo de monoides pues $w(T \cdot U) \equiv w(T) \cdot w(U)$. Es una biyección pues toda palabra es Knuth equivalente a la palabra de un único tableau de Young semi-estándar. □