UCE, otoño 2014

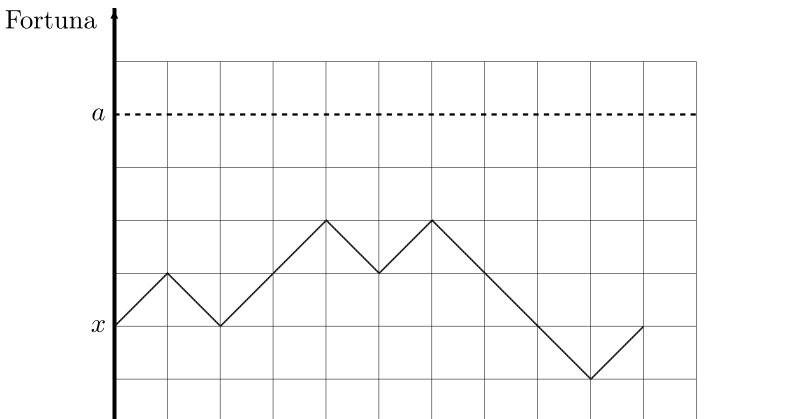
# Índice



# 1. Introducción

## 1.1. Definición: la ruina del jugador

Un jugador juega contra la banca partidas sucesivas e independientes. En cada partida, la probabilidad de ganar es $p \in ]0,1[$ y la de perder es $q = 1 - p$. Si el jugador pierde, entrega un dólar a la banca, y si gana recibe la misma cantidad. El jugador empiece con $x$ dólares. El juego se termina cuando el jugador ha perdido todo su dinero, o el jugador tiene $a$ dólares. Este juego se puede representar como una caminata aleatoria :




En este curso, vamos a contestar a las tres preguntas siguientes :

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el juego se acabe en tiempo finito ?

2. ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador pierda ? Y ¿ cuál es la probabilidad de que el jugador logre alcanzar $a$ dólares ?

3. ¿Cuál es la duración media del juego ?

Este problema aparece por la primera vez en una correspondencia entre Blaise Pascal y Pierre de Fermat en 1656. Ambos resolvieron el problema por su parte, pero aún ahora no se sabe exactamente cómo lo hicieron ya que sólo dieron la solución.

En este curso, vamos a resolver este problema de dos maneras, utilizando modernas herramientas cuyas teorías fueron desarrolladas el pasado siglo : las martingalas y los procesos de Markov. En los cálculos, diferenciaremos el caso equitativo ($p = 1/2$) del caso no equitativo ($p \neq 1/2$).

### 1.2. Modelización

Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con ley :

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \qquad \mathbb{P}(X_n = 1) = p \qquad \text{y} \qquad \mathbb{P}(X_n = -1) = q = 1 - p.$$

$X_n$ representa la ganancia o la pérdida de la $n$-ésima partida, de modo que la fortuna del jugador al cabo de $n$ partidas está dada por :

$$S_n = x + X_1 + \ldots + X_n.$$

$S$ es un ejemplo de proceso estocástico, en el cual $n$ es generalmente llamado el tiempo. Definimos además las dos variables aleatorias :

$$T_0 = \inf\{k \geq 0;\, S_k = 0\} \qquad \text{y} \qquad T_a = \inf\{k \geq 0;\, S_k = a\}.$$

$T_0$ es el instante (finito o no) en el que el jugador está arruinado y $T_a$ es el instante (finito o no) en el que el jugador ha logrado alcanzar $a$ dólares, y entonces ha ganado. Con estas notaciones, el juego se acaba al instante

$$\min(T_0, T_a) = T_0 \wedge T_a$$

de modo que :

1. La probabilidad de que el juego se acabe en tiempo finito es $\mathbb{P}(T_0 \wedge T_a < +\infty)$.
2. La probabilidad de que el jugador pierda es $\mathbb{P}(T_0 < T_a)$.
3. La duración media del juego es $\mathbb{E}[T_0 \wedge T_a]$.

Nuestro objetivo es entonces calcular estas tres cantidades.

## 2. Martingalas

### 2.1. Definición

Empezamos por estudiar algunas propiedades de la fortuna $S$ del jugador.

**Definición 1** (Filtración)**.**
*Una filtración de un espacio de probabilidades* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *es una familia creciente* $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ *de sub-*$\sigma$*-álgebras de* $\mathcal{F}$*:*

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}.$$

*La mas pequeña* $\sigma$*-algebra que contiene todos los* $(\mathcal{F}_n)$ *es denotada por* $\mathcal{F}_\infty$*.*

$$\mathcal{F}_\infty := \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n\right) \subset \mathcal{F}.$$

Si uno ve el parámetro $n$ como el tiempo, en este caso, la $\sigma$-algebra $\mathcal{F}_n$ representa la información que uno conoce al tiempo $n$. Generalmente, $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ es la filtración natural de un proceso estocástico $X = (X_n, n \in \mathbb{N})$ definida por :

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_k,\ k \leq n)$$

y la información conocida al tiempo $n$ se compone de los valores :

$$X_0(\omega),\ X_1(\omega),\ \ldots, X_n(\omega).$$

**Definición 2** (Proceso adaptado)**.**
*Un proceso estocástico $(X_n, n \in \mathbb{N})$ está adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_n,\, n \in \mathbb{N})$ si, para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_n$ es medible con respecto a $\mathcal{F}_n$.*

Obviamente, un proceso estocástico es siempre medible con respecto a su filtración natural.

**Definición 3** (Martingala)**.**
*Un proceso $M$ definido sobre un espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es una martingala con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_n,\, n \in \mathbb{N})$ si :*

I) *$M_n$ es integrable para cada $n \geq 0$,*

II) *$M$ está adaptado a $(\mathcal{F}_n,\, n \in \mathbb{N})$,*

III) *$\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n$ c.s.* $\qquad \forall n \in \mathbb{N}$

En particular, tomando la esperanza en cada lado de (III), se deduce que una martingala tiene una esperanza constante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_0]. \tag{1}$$

**Ejemplo 4** (La ruina del jugador con $p = 1/2$)**.**

1. La fortuna del jugador a cada instante es una martingala con respecto a su filtración natural. En efecto, su fortuna está dada por
$$S_n = x + X_1 + \ldots + X_n, \qquad (n \geq 0)$$
con filtración natural
$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{F}_n = \sigma(S_k,\ k \leq n) = \sigma(X_k,\ k \leq n).$$
Los dos primeros puntos de la definición son claros ya que
$$\mathbb{E}[|S_n|] \leq x + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[|X_k|] = x + n < +\infty$$
y $S$ es adaptado a su filtración natural. En cuanto al tercero :
$$\mathbb{E}[S_{n+1}|\ \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_n + X_{n+1}|\ \mathcal{F}_n] = S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}] = S_n.$$
Por consiguiente, $(S_n,\, n \geq 0)$ es una martingala. En particular, a cada instante, la esperanza de la fortuna del jugador es
$$\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[S_0] = x.$$

2. Con las mismas notaciones, el proceso $(M_n = S_n^2 - n,\ n \geq 0)$ es también una martingala ya que
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[(S_n + X_{n+1})^2 - (n+1)|\mathcal{F}_n] \\
&= \mathbb{E}[S_n^2|\mathcal{F}_n] + 2\mathbb{E}[S_n X_{n+1}|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] - (n+1) \\
&= M_n + 2S_n\mathbb{E}[X_{n+1}|F_n] + \mathbb{E}[X_{n+1}^2] - 1 \\
&= M_n.
\end{aligned}$$
Se observa que en este caso la filtración $(\mathcal{F}_n,\, n \geq 0)$ puede ser diferente de la filtración natural de $M$ (por ejemplo, si $x = 0$, entonces $M_1 = 0$ y no se conoce a $X_1$).

## 2.2. Tiempos de parada

Ahora, vamos a estudiar algunas propiedades de las variables aleatorias $T_0$ y $T_a$.

**Definición 5** (Tiempo de parada)**.**
*Una variable aleatoria $T = \Omega \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ es un tiempo de parada con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Esta definición significa que a cualquier instante $n \in \mathbb{N}$, se sabe si $T$ ha ocurrido o no.

**Ejemplo 6.**

1. Sea $(X_n, n \in \mathbb{N})$ un proceso adaptado a $(\mathcal{F}_n,\, n \in \mathbb{N})$, y $A$ un conjunto de Borel de $\mathbb{R}$. El primer tiempo en el que el proceso $X$ entra en el conjunto $A$:

$$\begin{aligned} T_A &= \text{ínf}\{n \in \mathbb{N};\; X_n \in A\} \\ &= +\infty \quad \text{si } \{n \in \mathbb{N};\; X_n \in A\} = \emptyset \end{aligned}$$

   es un tiempo de parada. En efecto :

$$\{T_A \le n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{X_k \in A\} \;\in\; \mathcal{F}_n.$$

2. Sean $S$ y $T$ dos tiempos de paradas. El máximo de los dos tiempos $T \vee S$ y el mínimo de los dos tiempos $T \wedge S$ son también tiempos de parada. En efecto :

$$\{S \vee T \le n\} = \{S \le n\} \cap \{T \le n\} \in\; \mathcal{F}_n$$

   ya que $S$ y $T$ son tiempos de parada. De la misma manera :

$$\{S \wedge T \le n\} = \{S \wedge T > n\}^c = (\{S > n\} \cap \{T > n\})^c \in\; \mathcal{F}_n.$$

**Definición 7.** *Sea $T$ un tiempo de parada y $(X_n, n \in \mathbb{N})$ un proceso adaptado. Definimos la $\sigma$-álgebra $\mathcal{F}_T$ como :*

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F},\; \forall n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\},\; A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n\},$$

*y, para todo $\omega \in \Omega$:*

$$X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega).$$

*Entonces, $X_T$ es una variable aleatoria $\mathcal{F}_T$-medible.*

La importancia de la noción de tiempo de parada se encuentra en el teorema siguiente, que es una generalización de la igualdad (1).

**Theorem 8** (Teorema de Doob)**.**
*Sean $(M_n, n \in \mathbb{N})$ una martingala y $T$ un tiempo de parada. Si*

- *$T$ está acotado,*
- *o si $(M_{n\wedge T}, n \in \mathbb{N})$ es un proceso acotado,*

*entonces,*

$$\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0].$$

**Proof.** Si $T$ está acotado por una constante $N$, se puede escribir :

$$\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}\left[M_T \sum_{k=0}^{N} 1_{\{T=k\}}\right] = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}[M_T 1_{\{T=k\}}] = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}[M_k 1_{\{T=k\}}].$$

Pero, como M es una martingala y gracias a las propiedades de la esperanza condicional :

$$\sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}[M_k 1_{\{T=k\}}] = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_N|\mathcal{F}_k] 1_{\{T=k\}}] = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_N 1_{\{T=k\}}|\mathcal{F}_k]] = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}[M_N 1_{\{T=k\}}] = \mathbb{E}[M_N] = \mathbb{E}[M_0]$$

lo que demuestra el primer punto. Ahora, aplicamos este resultado al tiempo de parada acotado $n \wedge T$. Obtenemos

$$\mathbb{E}[M_{n\wedge T}] = \mathbb{E}[M_0]$$

y, como el proceso $(M_{n\wedge T}, n \in \mathbb{N})$ está acotado, el resultado es una consecuencia del teorema de convergencia dominada.

■

Damos ahora una recíproca al teorema de Doob.

**Theorem 9.** *Un proceso adaptado $(M_n, n \in \mathbb{N})$ es una martingala si y sólo si para todo tiempo de parada $T$ acotado, la variable aleatoria $M_T$ es integrable y $\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]$.*

**Prueba.** Sean $k < n$ y $A \in \mathcal{F}_k$. La variable aleatoria $T = n1_{A^c} + k1_A$ es un tiempo de parada acotado, entonces

$$\mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_n 1_{A^c}] + \mathbb{E}[M_k 1_A].$$

Por otro lado, $n$ también es un tiempo de parada acotado, de modo que :

$$\mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_n 1_{A^c}] + \mathbb{E}[M_n 1_A].$$

La comparación de las dos igualidades nos da el resultado: $\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_k] = M_k$.

■

## 2.3. La ruina del jugador con martingalas : caso equitativo

Podemos ahora contestar a las tres preguntas sobre la ruina del jugador. Recordamos los dos tiempos de parada:

$$T_0 = \text{ínf}\{k \geq 0;\, S_k = 0\} \qquad \text{y} \qquad T_a = \text{ínf}\{k \geq 0;\, S_k = a\}$$

y vamos a aplicar el teorema de Doob con las martingalas $(S_n,\, n \geq 0)$ y $(M_n,\, n \geq 0)$, y con el tiempo de parada $T_0 \wedge T_a$ en el cual se acaba el juego.

→ *Primero, ¿cuál es la probabilidad de que el juego se acabe en tiempo finito ?*
Consideramos el tiempo acotado $k \wedge T_0 \wedge T_a$ y la martingala $M$ :

$$x^2 = \mathbb{E}[(S_{k\wedge T_0 \wedge T_a})^2 - k \wedge T_a \wedge T_0] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}[k \wedge T_0 \wedge T_a] = \mathbb{E}\left[(S_{k\wedge T_0\wedge T_a})^2\right] - x^2 \leq a^2 - x^2$$

Después, dejamos $k \to +\infty$, utilizando el teorema de convergencia monótona para obtener :

$$\mathbb{E}[T_0 \wedge T_a] \leq a^2 - x^2.$$

Entonces $\mathbb{E}[T_0 \wedge T_a] < +\infty$, y por consiguiente, $\mathbb{P}(T_0 \wedge T_a < +\infty) = 1$, es decir que el juego se acaba en tiempo finito.

→*Segundo, ¿cuál es la probabilidad de que el jugador logre alcanzar a dólares ?*
$|S_{T_0\wedge T_a}|$ es acotado por $a$, entonces se puede aplicar directamente el teorema de Doob para obtener :

$$\begin{aligned} x = \mathbb{E}[S_{T_0\wedge T_a}] &= \mathbb{E}[S_{T_0\wedge T_a} 1_{\{T_0<T_a\}}] + \mathbb{E}[S_{T_0\wedge T_a} 1_{\{T_a<T_0\}}] \\ &= \mathbb{E}[S_{T_0} 1_{\{T_0<T_a\}}] + \mathbb{E}[S_{T_a} 1_{\{T_a<T_0\}}] \\ &= a\mathbb{P}(T_a < T_0). \end{aligned}$$

Así, la probabilidad de que el jugador gane el juego es $\mathbb{P}(T_a < T_0) = \dfrac{x}{a}$.

→ *Por fin, ¿cuál es la duración media de una partida ?*
Volvemos al primer cálculo, dejando $k \to +\infty$ y utilizando el teorema de convergencia dominada :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T_0 \wedge T_a] &= \mathbb{E}[(S_{T_0\wedge T_a})^2] - x^2 \\ &= \mathbb{E}[S_{T_0}^2 1_{\{T_0<T_a\}}] + \mathbb{E}[S_{T_a}^2 1_{\{T_a<T_0\}}] - x^2 \\ &= a^2\mathbb{P}(T_a < T_0) - x^2 = ax - x^2 = x(a-x). \end{aligned}$$

En particular, la esperanza de la duración del juego es máxima si la fortuna inicial del jugador es exactamente la mitad de la banca.

## 2.4. La ruina del jugador con martingalas : caso no equitativo

En este caso, la fortuna del jugador $S_n = x + X_1 + \ldots + X_n$ ya no es una martingala. En efecto :

$$\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}] = S_n + p - (1-p) = S_n + p - q \neq S_n.$$

De la misma manera, se puede ver que $(S_n^2 - n,\, n \geq 0)$ tampoco es una martingala. Entonces, tenemos que encontrar otras martingalas para resolver el problema.

Usando la idea del cálculo anterior, se puede ver fácilmente que el proceso $(S_n - n(p-q),\, n \geq 0)$ es una martingala. Eso permite contestar a la primera pregunta.

→ *¿Cuál es la probabilidad de que el juego se acabe en tiempo finito ?*
Consideramos el tiempo acotado $k \wedge T_0 \wedge T_a$ y aplicamos el teorema de Doob :

$$x = \mathbb{E}[S_{k\wedge T_0 \wedge T_a} - (k \wedge T_0 \wedge T_a)(p-q)] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}[k \wedge T_0 \wedge T_a] = \frac{\mathbb{E}\left[S_{k\wedge T_0\wedge T_a}\right] - x}{p-q} \leq \frac{a-x}{p-q}.$$

Dejando $k \to +\infty$ y utilizando el teorema de convergencia monótona, obtenemos $\mathbb{E}[T_0 \wedge T_a] \leq \frac{a-x}{p-q}$ lo que implica que $\mathbb{P}(T_0 \wedge T_a < +\infty) = 1$.

Si continuamos el cálculo, se deduce del teorema de convergencia dominada :

$$x = \mathbb{E}[S_{T_0\wedge T_a}] - \mathbb{E}[T_0 \wedge T_a](p-q) = a\mathbb{P}(T_a < T_0) - \mathbb{E}[T_0 \wedge T_a](p-q) \tag{2}$$

pero esta relación no basta para contestar a las preguntas dos y tres. Entonces, vamos a demostrar que el proceso

$$M_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}, \qquad n \geq 0,$$

es otra martingala. En efecto :

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} \mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n+1}} |\mathcal{F}_n\right] = M_n \mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n+1}}\right] = M_n \left(\left(\frac{q}{p}\right)^1 p + \left(\frac{q}{p}\right)^{-1} q\right) = M_n.$$

→*¿Cuál es la probabilidad de que el jugador logre alcanzar a dólares ?*
Así, aplicando el teorema de Doob ya que la variable aleatoria $M_{T_0\wedge T_a}$ está acotada :

$$\left(\frac{q}{p}\right)^x = \mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{S_{T_0\wedge T_a}}\right] = \mathbb{P}(T_0 < T_a) + \left(\frac{q}{p}\right)^a \mathbb{P}(T_a < T_0)$$

de modo que :

$$\mathbb{P}(T_a < T_0) = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}.$$

→ *Por fin, ¿cuál es la duración media del juego ?*
Volvemos a la relación (2) :

$$x = a\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a} - \mathbb{E}[T_0 \wedge T_a](p-q)$$

de la cual se obtiene :

$$\mathbb{E}[T_0 \wedge T_a] = \frac{a}{p-q}\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a} - \frac{x}{p-q}.$$

# 3. Cadenas de Markov

Ahora, vamos a resolver otra vez el problema de la ruina del jugador, pero con otra herramienta. En pocas palabras, los procesos de Markov son procesos estocásticos que satisfacen la propiedad siguiente :

*Condicionalmente al pasado, el futuro sólo depende del presente.*

Eso significa que para calcular una probabilidad cualquiera sobre un evento futuro, sólo se necesita saber el presente, y nada mas.

## 3.1. Definición

Sea $(E, \mathcal{E})$ un espacio medible. $E$ se llama el espacio de los estados: generalmente se elige $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}^d$ o $\mathbb{R}^d$. Una probabilidad de transición $\pi$ sobre $E$ es una aplicación de $E \times \mathcal{E}$ hasta $[0,1]$ tal que :

I) Por cada $x \in E$, la aplicación $A \longmapsto \pi(x, A)$ es una probabilidad sobre $(E, \mathcal{E})$.

II) Por cada conjunto $A \in \mathcal{E}$, la aplicación $x \longmapsto \pi(x, A)$ es medible.

Si $f$ es una función medible, se define :

$$\pi(x, f) = \int_E f(y)\pi(x, dy).$$

En particular, $\pi(x, A) = \displaystyle\int_E 1_{\{A\}}(y)\pi(x, dy)$.

**Definición 10.** *Una sucesión de variables aleatorias $(X_n, n \geq 0)$ con valores en $(E, \mathcal{E})$ es una cadena de Markov con ley inicial $\mu$ y probabilidad de transición $\pi$ si :*

1. $\mathbb{P}(X_0 \in dx_0) = \mu(dx_0)$
2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, la ley condicional de $X_{n+1}$ conociendo $X_0, X_1, \ldots, X_n$ es $\pi(X_n, \centerdot)$ :*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in dx_{n+1} | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \pi(x_n, dx_{n+1})$$

Si $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ es la filtración natural del proceso (es decir $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k,\ k \leq n)$ para cualquier $n$), la última relación se puede también escribir :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in dx_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \pi(X_n, dx_{n+1}) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in dx_{n+1} | X_n).$$

**Remark 11.** Una cadena de Markov describe el movimiento aleatorio de una partícula de la manera siguiente :
- al instante 0, la posición inicial de la partícula es elegida al azar según la ley $\mu$.
- al instante 1, conociendo la posición inicial de la partícula $X_0 = x_0$, se elige al azar una nueva posición según la ley $\pi(x_0, \centerdot)$.
- al instante 2, conociendo la posición precedente de la partícula $X_1 = x_1$, ella salta al azar a una nueva posición según la ley $\pi(x_1, \centerdot)$.
- ...

**Ejemplo 12.** En los dos casos (equitativo o no) la fortuna del jugador es una cadena de Markov.

1. La distribución inicial está dada por :

$$\mathbb{P}(S_0 \in ds_0) = \delta_x(ds_0)$$

donde $\delta_x$ es la medida de Dirac al punto $x$.

2. Y la probabilidad de transición está dada por :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{n+1} \in ds_{n+1} | S_0 = s_0, S_1 = s_1, \ldots, S_n = s_n) &= \mathbb{P}(S_{n+1} \in ds_{n+1} | S_n = s_n) \\ &= p\,\delta_{s_n+1}(ds_{n+1}) + q\,\delta_{s_n-1}(ds_{n+1}) = \pi(s_n, ds_{n+1})\end{aligned}$$

Ahora vamos a dar una definición más general de la propiedad de Markov, gracias a la noción de cadena de Markov canónica.

**Theorem 13.** *Definimos el espacio canónico $\Omega_0 = E^{\mathbb{N}}$ de las sucesiones $\omega : k \longrightarrow \omega_k$ con valores en $E$, así que las aplicaciones coordenadas :*

$$X_n(\omega) = \omega_n \qquad (n \geq 0).$$

*La filtración natural de $X$ es*

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_k,\, k \leq n) \qquad y \qquad \mathcal{F}_\infty = \sigma(X_k,\, k \geq 0).$$

i) *Para cada medida $\mu$ sobre $E$, existe una única probabilidad $\mathbb{P}_\mu$ sobre $(\Omega_0, \mathcal{F}_\infty)$ tal que $(\Omega_0, \mathcal{F}_\infty, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, (X_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P}_\mu)$ sea una cadena de Markov con ley inicial $\mu$ y con probabilidad de transición $\pi$.*

ii) *Para cada conjunto $A \in \mathcal{F}_\infty$, se tiene*

$$\mathbb{P}_\mu(A) = \int_E \mathbb{P}_x(A)\mu(dx)$$

*donde hemos escrito $\mathbb{P}_x$ en vez de $\mathbb{P}_{\delta_x}$ para simplificar las notaciones.*

*La cadena de Markov canónica con probabilidad de transición $\pi$ es definida por*

$$(\Omega_0, \mathcal{F}_\infty, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, (X_n)_{n\geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in E}).$$

El principal interés de trabajar sobre el espacio canónico es que se puede utilizar las traslaciones. En efecto, sea $\theta$ el operador de traslación definido por :

$$\begin{array}{cccc} \theta : & \Omega_0 & \longrightarrow & \Omega_0 \\ & \omega = (\omega_k)_{k\geq 0} & \longmapsto & \omega = (\omega_{k+1})_{k\geq 0}. \end{array}$$

Por recurrencia se define :

$$\theta_0 = \text{Identidad}, \qquad \text{y para } p \geq 1, \qquad \theta_p = \theta \circ \theta_{p-1} = \theta_{p-1} \circ \theta$$

de modo que $\theta_p$ representa una traslación de $p$ incrementos :

$$\theta_p(\omega) = (\omega_{k+p})_{k\geq 0}.$$

Por consiguiente, se tiene :

$$X_n \circ \theta_p(\omega) = X_n((\omega_{k+p})_{k\geq 0}) = \omega_{n+p} = X_{n+p}(\omega).$$

Con estas notaciones, se puede enunciar la propiedad de Markov de manera general.

**Theorem 14** (Propiedad de Markov)**.** *Sea $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, (X_n)_{n\geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in E})$ una cadena de Markov canónica. Entonces*

$$\mathbb{E}_\mu\left[\Phi \circ \theta_n | \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}_{X_n}\left[\Phi\right]$$

*para toda medida $\mu$ y toda variable aleatoria $\Phi$ positiva (o acotada) $\mathcal{F}_\infty$-medible.*

## 3.2. La ruina del jugador con procesos de Markov : caso equitativo

En esta sección, volvemos a encontrar los resultados de la sección precedente sobre la ruina del jugador cuando el juego es equitativo. Para simplificar las notaciones, definimos al tiempo en el que el juego se acaba :

$$T = T_0 \wedge T_a.$$

$\rightarrow$ *¿Cuál es la probabilidad de que el juego se acabe en tiempo finito ?*
Definimos $u(x) = \mathbb{P}_x(T < +\infty)$. Ya sabemos que $u(0) = 1$ y $u(a) = 1$. Utilizando la propiedad de Markov, se puede escribir para $1 \leq x \leq a-1$ :

$$\begin{aligned} u(x) = \mathbb{P}_x(T < \infty) &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{P}_x(T < \infty | \mathcal{F}_1)\right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x\left[1_{\{T<+\infty\}} \circ \theta_1 | \mathcal{F}_1\right]\right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{P}_{S_1}(T < \infty)\right] \\ &= \mathbb{P}_{x+1}(T < \infty)\frac{1}{2} + \mathbb{P}_{x-1}(T < \infty)\frac{1}{2} \\ &= \frac{u(x+1) + u(x-1)}{2} \end{aligned}$$

En particular, la función $u$ verifica :

$$u(x+1) - u(x) = u(x) - u(x-1)$$

es decir que sus incrementos son constantes. Ya que $u(0) = 1$ y $u(a) = 1$, se deduce que $u(x) = 1$ para todo $x \in \{0, \ldots, a\}$, es decir que el juego acaba en tiempo finito.

→*¿Cuál es la probabilidad de que el jugador logre alcanzar a dólares ?*
Vamos a hacer los mismos cálculos, pero esta vez con $u(x) = \mathbb{P}_x(S_T = a)$. Ya sabemos que $u(0) = 0$ y $u(a) = 1$. Utilizando la propiedad de Markov, se puede escribir otra vez, para $1 \leq x \leq a-1$ :

$$\begin{aligned}
u(x) = \mathbb{P}_x(S_T = a) &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{P}_x(S_T = a|\mathcal{F}_1)\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x\left[1_{\{S_T=a\}} \circ \theta_1 | \mathcal{F}_1\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{P}_{S_1}(S_T = a)\right] \\
&= \mathbb{P}_{x+1}(S_T = a)\frac{1}{2} + \mathbb{P}_{x-1}(S_T = a)\frac{1}{2} \\
&= \frac{u(x+1) + u(x-1)}{2}
\end{aligned}$$

En particular, la función $u$ verifica :

$$u(x+1) = 2u(x) - u(x-1)$$

Como $u(0) = 0$, se deduce facilmente que $u(k) = ku(1)$ para $k \in \{0, 1, \ldots, a\}$, y la condición $u(a) = 1$ nos da $u(1) = \dfrac{1}{a}$. Finalmente, la probabilidad de que el jugador gane está dada por :

$$u(x) = \mathbb{P}_x(S_T = a) = \frac{x}{a}.$$

→ *Por fin, ¿cuál es la duración media del juego ?*
La duración media del juego es definida por $v(x) = \mathbb{E}_x[T]$. Las condiciones de frontera son esta vez: $v(0) = 0$ y $v(a) = 0$. Utilizando la propiedad de Markov, tenemos :

$$\begin{aligned}
v(x) = \mathbb{E}_x[T] &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x\left[T|\mathcal{F}_1\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x\left[(T+1) \circ \theta_1 | \mathcal{F}_1\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_{S_1}\left[T+1\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_{x+1}\left[T+1\right]\frac{1}{2} + \mathbb{E}_{x-1}\left[T+1\right]\frac{1}{2} \\
&= 1 + \frac{v(x+1) + v(x-1)}{2}.
\end{aligned}$$

Como antes, se puede volver a escribir :

$$v(x+1) - v(x) = v(x) - v(x-1) - 2$$

o, con diferencias: $d(x+1) = d(x) - 2$ para $x \in \{1, \ldots, a-1\}$. La cual es una sucesión aritmética, entonces : $d(x) = d(1) - 2(x-1)$. Observamos además :

$$\sum_{k=1}^{x} d(k) = v(x) - v(0) = xd(1) - 2\sum_{k=1}^{x}(k-1) = xd(1) - (x-1)x.$$

Gracias a las condiciones de frontera, tenemos también

$$v(a) - v(0) = 0 = ad(1) - (a-1)a \qquad \Longleftrightarrow \qquad d(1) = a-1$$

de modo que :

$$v(x) = \mathbb{E}_x\left[T\right] = x(a-1) - (x-1)x = x(a-x)$$

que es el resultado que esperábamos.

## 3.3. La ruina del jugador con procesos de Markov : caso no equitativo

→ *¿Cuál es la probabilidad de que el juego se acabe en tiempo finito ?*
De la misma manera, la función $u(x) = \mathbb{P}_x(T < +\infty)$ satisface la ecuación :

$$u(x) = p\,u(x+1) + q\,u(x-1)$$

lo que se puede también escribir :

$$p\, u(x+1) - u(x) + q\, u(x-1) = 0.$$

Esta ecuación define una sucesión linear de orden 2 homogénea, que se puede resolver gracias a su ecuación característica :

$$pr^2 - r + q = 0.$$

El discriminante de la ecuación es $\Delta = (-1)^2 - 4pq = (2p-1)^2 > 0$ ya que $p$ y $q$ son diferentes de $1/2$. Entonces, tenemos dos soluciones :

$$r_1 = 1 \qquad \text{y} \qquad r_2 = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p}$$

y la función $u$ puede escribirse :

$$u(x) = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^x.$$

Las condiciones de fronteras $u(0) = 1$ y $u(a) = 1$ permiten calcular $A$ y $B$ :

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A + B\left(\dfrac{q}{p}\right)^a = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases}$$

y finalmente $u(x) = \mathbb{P}_x(T < +\infty) = 1$ para todo $x \in \{0, \ldots, a\}$.

→*¿Cuál es la probabilidad de que el jugador logre alcanzar a dólares ?*
Como precedemente, la función $u(x) = \mathbb{P}_x(S_T = a)$ es también solución de la ecuación :

$$p\, u(x+1) - u(x) + q\, u(x-1) = 0,$$

y entonces se puede escribir :

$$u(x) = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^x.$$

La condiciones de fronteras esta vez son $u(0) = 0$ y $u(a) = 1$, de modo que :

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A + B\left(\dfrac{q}{p}\right)^a = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \dfrac{1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a} \\ B = -\dfrac{1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a} \end{cases}$$

y finalmente :

$$u(x) = \mathbb{P}_x(S_T = a) = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}.$$

→ *Por fin, ¿cuál es la duración media del juego ?*
Definimos $v(x) = \mathbb{E}_x[T]$. Utilizando la propiedad de Markov, tenemos :

$$\begin{aligned} v(x) = \mathbb{E}_x[T] &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x\left[T|\mathcal{F}_1\right]\right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_{S_1}\left[T+1\right]\right] \\ &= \mathbb{E}_{x+1}\left[T+1\right]p + \mathbb{E}_{x-1}\left[T+1\right]q \\ &= 1 + p\, v(x+1) + q\, v(x-1) \end{aligned}$$

es decir :

$$p\, v(x+1) - v(x) + q\, v(x-1) = -1.$$

Esta ecuación define una sucesión linear de orden 2 no homogénea. Para resolverla, tenemos que resolver la misma ecuación homogénea, y añadir una solución particular. Ya conocemos la solución de la ecuación homogénea :

$$v_H(x) = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^x$$

y nos queda encontrar una solución particular $v_0$. Si buscamos una solución de la forma $cx$, se obtiene:

$$pc(x+1) - cx + qc(x-1) = c(p-q)$$

de modo que sólo hace falta tomar $c = \dfrac{1}{q-p}$. Ahora,

$$v(x) = v_H(x) + v_0(x) = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^x + \frac{x}{q-p}$$

y las condiciones de fronteras $v(0) = 0$ y $v(a) = 0$ permiten calcular $A$ y $B$ :

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A + B\left(\dfrac{q}{p}\right)^a + \dfrac{a}{q-p} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \dfrac{a}{p-q}\dfrac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a} \\ B = -\dfrac{a}{p-q}\dfrac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}. \end{cases}$$

Finalmente obtenemos otra vez :

$$v(x) = \mathbb{E}_x[T_0 \wedge T_a] = \frac{a}{p-q}\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^x}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a} - \frac{x}{p-q}.$$

# 4. ¿Y si la banca ya no tiene límites ?

En esta sección, vamos a dejar $a$ tender a $+\infty$, y estudiar lo que ocurre en las tres situaciones : $p = q,\ p < q$ y $p > q$.

## 4.1. Caso equitativo : $p = q = 1/2$

Empezamos por el caso $p = q$. En este caso, aplicando el teorema de convergencia monótona,

$$\mathbb{P}_x(T_0 < +\infty) = \lim_{a\to+\infty} \mathbb{P}_x(T_0 < T_a) = \lim_{a\to+\infty} 1 - \frac{x}{a} = 1$$

es decir, que el jugador va a perder casi seguramente. Observe que se tiene también

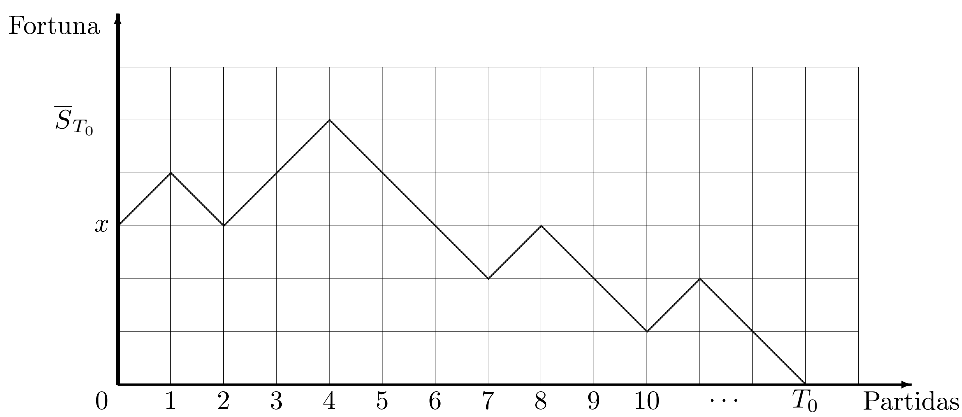
$$\mathbb{E}_x[T_0] = \lim_{a\to+\infty} \mathbb{E}_x\left[T_a \wedge T_0\right] = \lim_{a\to+\infty} x(a-x) = +\infty,$$

es decir, que la duración media del juego es infinita. Ahora vamos a contestar la pregunta siguiente :

→*¿Cuál es la distribución de la fortuna máxima del jugador, antes de perder ?*
Si definimos la fortuna máxima que el jugador ha logrado alcanzar al cabo de $n$ partidas como :

$$\overline{S}_n = \max_{i\in\{0,\ldots,n\}} S_i$$

lo que queremos calcular es la distribución de $\overline{S}_{T_0}$ :




Vamos a contestar a esta pregunta de dos maneras diferentes.

**Solución directa**

Esta pregunta se puede resolver fácilmente gracias a los cálculos anteriores. Observamos primero que, si $b > x$ :

$$\mathbb{P}_x(\overline{S}_{T_0} \geq b) = \mathbb{P}_x(T_b < T_0) = \frac{x}{b}$$

mientras que, si $b \leq x$ :

$$\mathbb{P}_x(\overline{S}_{T_0} \geq b) = 1.$$

Así, para $b \geq x$

$$\mathbb{P}_x(\overline{S}_{T_0} = b) = \mathbb{P}_x(\overline{S}_{T_0} \geq b) - \mathbb{P}_x(\overline{S}_{T_0} \geq b+1) = \frac{x}{b(b+1)}.$$

**Solución con martingalas**

Primero, vamos a verificar que, para $z \in ]0,1[$, el proceso

$$M_n = z^{\overline{S}_n}\left(\overline{S}_n - S_n + \frac{1}{1-z}\right), \qquad n \geq 0,$$

es una martingala con respecto a la filtración natural de $S$. En efecto :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[M_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{S}_n \vee (S_n + X_{n+1})}\left(\overline{S}_n \vee (S_n + X_{n+1}) - S_n - X_{n+1} + \frac{1}{1-z}\right)|\mathcal{F}_n\right] \\
&= \frac{1}{2} z^{\overline{S}_n \vee (S_n+1)}\left(\overline{S}_n \vee (S_n+1) - S_n - 1 + \frac{1}{1-z}\right) + \frac{1}{2} z^{\overline{S}_n}\left(\overline{S}_n - S_n + 1 + \frac{1}{1-z}\right)
\end{aligned}$$

ya que $\overline{S}_n \geq S_n$ lo que implica $\overline{S}_n \vee (S_n - 1) = \overline{S}_n$. Ahora, si $S_n + 1 \geq \overline{S}_n$ se deduce que $\overline{S}_n = S_n$ ya que los incrementos sólo son de uno. Entonces el primer término se simplifica para dar :

$$\begin{aligned}
z^{\overline{S}_n \vee (S_n+1)}\left(\overline{S}_n \vee (S_n+1) - S_n - 1 + \frac{1}{1-z}\right) &= z^{\overline{S}_n}\left(\overline{S}_n - S_n - 1 + \frac{1}{1-z}\right) 1_{\{\overline{S}_n > S_n\}} + z^{\overline{S}_n + 1}\frac{1}{1-z} 1_{\{\overline{S}_n = S_n\}} \\
&= z^{\overline{S}_n}\left(\overline{S}_n - S_n + \frac{1}{1-z}\right) - z^{\overline{S}_n}
\end{aligned}$$

y finalmente :

$$\mathbb{E}_x\left[M_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] = z^{\overline{S}_n}\left(\overline{S}_n - S_n + \frac{1}{1-z}\right) = M_n.$$

Ahora, vamos a aplicar el teorema de Doob con el tiempo de parada $T_0$. Se observa que :

$$M_{T_0} \leq z^{\overline{S}_{T_0}}\left(\overline{S}_{T_0} + \frac{1}{1-z}\right) \leq \frac{1}{1-z} - \frac{1}{e\ln(z)}$$

ya que $z \in ]0,1[$, de modo que podemos escribir :

$$\frac{z^x}{1-z} = \mathbb{E}_x\left[z^{\overline{S}_{T_0}}\left(\overline{S}_{T_0} - S_{T_0} + \frac{1}{1-z}\right)\right] = \mathbb{E}_x\left[z^{\overline{S}_{T_0}}\left(\overline{S}_{T_0} + \frac{1}{1-z}\right)\right].$$

Esta relación nos da :

$$\begin{aligned}
z^x &= \mathbb{E}_x\left[(\overline{S}_{T_0} + 1) z^{\overline{S}_{T_0}} - \overline{S}_{T_0} z^{\overline{S}_{T_0}+1}\right] \\
&= \sum_{k=x}^{+\infty} z^k (k+1)\mathbb{P}_x(\overline{S}_{T_0} = k) - \sum_{k=x}^{+\infty} z^{k+1} k\, \mathbb{P}_x(\overline{S}_{T_0} = k) \\
&= z^x (x+1)\mathbb{P}_x(\overline{S}_{T_0} = x) + \sum_{k=x+1}^{+\infty} z^k \left((k+1)\mathbb{P}_x(\overline{S}_{T_0} = k) - (k-1)\mathbb{P}_x(\overline{S}_{T_0} = k-1)\right).
\end{aligned}$$

Identificando ambos lados :

$$(x+1)\mathbb{P}_x(\overline{S}_{T_0} = x) = 1 \qquad \text{y para } k > x, \qquad (k+1)\mathbb{P}_x(\overline{S}_{T_0} = k) - (k-1)\mathbb{P}_x(\overline{S}_{T_0} = k-1) = 0$$

se deduce que :

$$\mathbb{P}_x(\overline{S}_{T_0} = x) = \frac{1}{1+x}$$

y por recurrencia :

$$\mathbb{P}_x(\overline{S}_{T_0} = k) = \frac{k-1}{k+1}\mathbb{P}_x(\overline{S}_{T_0} = k-1) = \frac{k-1}{k+1}\frac{k-2}{k}\frac{k-3}{k-1}\cdots\frac{x-1}{x+3}\frac{x}{x+2}\frac{1}{x+1} = \frac{x}{(k+1)k}.$$

## 4.2. Caso no equitativo : $p < q$

En este caso, la probabilidad de perder cada partida es más grande que la de ganar. El teorema de convergencia monótona nos da otra vez :

$$\mathbb{P}_x(T_0 < +\infty) = \lim_{a\to+\infty} \mathbb{P}_x(T_0 < T_a) = \lim_{a\to+\infty} 1 - \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^x}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a} = 1,$$

de modo que las caminatas aleatorias se van a parecer al caso precedente. Pero ahora la duración media del juego es finita :

$$\mathbb{E}_x[T_0] = \lim_{a\to+\infty} \mathbb{E}_x\left[T_a \wedge T_0\right] = \lim_{a\to+\infty} \frac{a}{p-q}\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^x}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a} - \frac{x}{p-q} = \frac{x}{q-p}.$$

De la misma manera, la distribución de la variable aleatoria $\overline{S}_{T_0}$ está dada por :

$$\mathbb{P}_x(\overline{S}_{T_0} \geq b) = \mathbb{P}_x(T_b < T_0) = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^x}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^b} \qquad \text{para } b > x$$

y

$$\mathbb{P}_x(\overline{S}_{T_0} \geq b) = 1 \qquad \text{para } b \leq x.$$

Así, para $b \geq x$

$$\mathbb{P}_x(\overline{S}_{T_0} = b) = \mathbb{P}_x(\overline{S}_{T_0} \geq b) - \mathbb{P}_x(\overline{S}_{T_0} \geq b+1) = \left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^x\right)\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^b\left(1-\frac{q}{p}\right)}{\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^b\right)\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^{b+1}\right)}.$$

## 4.3. Caso no equitativo : $p > q$

En este caso, la probabilidad de ganar cada partida es más grande que la de perder. El teorema de convergencia monótona nos da :

$$\mathbb{P}_x(T_0 < +\infty) = \lim_{a\to+\infty} \mathbb{P}_x(T_0 < T_a) = \lim_{a\to+\infty} 1 - \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^x}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a} = \left(\frac{q}{p}\right)^x$$

es decir, que hay una probabilidad no nula que el juego nunca se acabe. La fortuna del jugador puede crecer hasta $+\infty$. Por supuesto,

$$\mathbb{E}_x[T_0] = \lim_{a\to+\infty} \mathbb{E}_x\left[T_a \wedge T_0\right] = \lim_{a\to+\infty} \frac{a}{p-q}\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^x}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a} - \frac{x}{p-q} = +\infty.$$

Entonces, en este caso, la variable aleatoria $\overline{S}_{T_0}$ puede ser infinita :

$$\mathbb{P}_x(\overline{S}_{T_0} = +\infty) = \lim_{b\to+\infty} \mathbb{P}_x(T_b < T_0) = 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^x.$$

De la misma manera que en la sección anterior, para $x \leq b < +\infty$:

$$\mathbb{P}_x(\overline{S}_{T_0} = b) = \left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^x\right)\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^b\left(1-\frac{q}{p}\right)}{\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^b\right)\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^{b+1}\right)}.$$

## Apéndice : La distribución de la duración del juego en el caso equitativo

En esta sección, vamos a calcular la distribución de la variable aleatoria $T = T_0 \wedge T_a$ cuando el juego es equitativo ($p = 1/2$).

### Solución con martingalas

Primero, tenemos por simetría :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(T_0 \wedge T_a = n) &= \mathbb{P}_x(\{T_a = n\} \cap \{T_a < T_0\}) + \mathbb{P}_x(\{T_0 = n\} \cap \{T_0 < T_a\}) \\
&= \mathbb{P}_x(\{T_a = n\} \cap \{T_a < T_0\}) + \mathbb{P}_{a-x}(\{T_a = n\} \cap \{T_a < T_0\})
\end{aligned}$$

así que sólo se necesita calcular

$$\mathbb{P}_x(\{T_a = n\} \cap \{T_a < T_0\}).$$

Por eso, definimos la martingala, para $\theta > 0$ :

$$M_n = \frac{\sinh(\theta S_n)}{(\cosh(\theta))^n}, \qquad (n \geq 0).$$

En efecto :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \frac{1}{2(\cosh(\theta))^{n+1}} \left( e^{\theta S_n}\mathbb{E}[e^{\theta X_{n+1}}|\mathcal{F}_n] - e^{-\theta S_n}\mathbb{E}[e^{-\theta X_{n+1}}|\mathcal{F}_n] \right) \\
&= \frac{1}{2(\cosh(\theta))^{n+1}} \left( e^{\theta S_n}\cosh(\theta) - e^{-\theta S_n}\cosh(\theta) \right) \\
&= M_n.
\end{aligned}$$

El teorema de Doob nos da :

$$\sinh(\theta x) = \mathbb{E}_x\left[\frac{\sinh\left(\theta S_{T_0 \wedge T_a}\right)}{(\cosh(\theta))^{T_0 \wedge T_a}}\right] = \sinh(\theta a)\mathbb{E}_x\left[(\cosh(\theta)^{-T_a} 1_{\{T_a < T_0\}}\right].$$

Ahora, ponemos $z = \dfrac{1}{\cosh(\theta)} \in ]0,1[$ es decir $\theta = \mathrm{Argch}(1/z)$. La cual nos da la función generatriz de $T_a$ sobre el conjunto $\{T_a < T_0\}$ :

$$\mathbb{E}\left[z^{T_a} 1_{\{T_a < T_0\}}\right] = \frac{\sinh\left(x\mathrm{Argch}\left(1/z\right)\right)}{\sinh\left(a\mathrm{Argch}\left(1/z\right)\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \mathbb{P}_x(\{T_a = n\} \cap \{T_a < T_0\}).$$

Entonces :

$$\mathbb{E}_x\left[z^{T_0 \wedge T_a}\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \mathbb{P}_x(T_0 \wedge T_a = n) = \frac{\sinh\left(x\mathrm{Argch}\left(1/z\right)\right)}{\sinh\left(a\mathrm{Argch}\left(1/z\right)\right)} + \frac{\sinh\left((a-x)\mathrm{Argch}\left(1/z\right)\right)}{\sinh\left(a\mathrm{Argch}\left(1/z\right)\right)} \qquad (0 < z < 1).$$

Para encontrar a $\mathbb{P}_x(T_0 \wedge T_a = n)$, queda desarrollar la parte derecha en serie de potencias e identificar los términos, pero eso no se va a simplificar bien.

### Solución con cadenas de Markov

Vamos a tratar de calcular directamente la función generatriz de $T_0 \wedge T_a$ para $z \in ]0,1[$:

$$u(x) = \mathbb{E}_x\left[z^{T_0 \wedge T_a}\right].$$

Utilizando la propiedad de Markov, tenemos :

$$\begin{aligned}
u(x) = \mathbb{E}_x\left[z^{T_0 \wedge T_a}\right] &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x\left[z^{T_0 \wedge T_a}|\mathcal{F}_1\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x\left[z^{(T_0 \wedge T_a + 1)} \circ \theta_1|\mathcal{F}_1\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_{S_1}\left[z^{(T_0 \wedge T_a + 1)}\right]\right] \\
&= \frac{z}{2}\mathbb{E}_{x+1}\left[z^{T_0 \wedge T_a}\right] + \frac{z}{2}\mathbb{E}_{x-1}\left[z^{T_0 \wedge T_a}\right] \\
&= \frac{z}{2}(u(x+1) + u(x-1))
\end{aligned}$$

que se puede volver a escribir :

$$u(x+1) - \frac{2}{z}u(x) + u(x-1) = 0.$$

El discriminante de este ecuación vale $\Delta = \frac{4}{z^2} - 4 > 0$, así que tenemos dos soluciones :

$$r_1 = \frac{1}{z} + \sqrt{\frac{1}{z^2} - 1} \qquad \text{y} \qquad r_2 = \frac{1}{z} - \sqrt{\frac{1}{z^2} - 1}$$

y $u$ puede escribirse :

$$u(x) = Ar_1^x + Br_2^x.$$

Con las condiciones de frontera $u(0) = 1$ y $u(a) = 1$ se deduce :

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ Ar_1^a + Br_2^a = 1 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} A = \dfrac{1 - r_2^a}{r_1^a - r_2^a} \\ B = -\dfrac{1 - r_1^a}{r_1^a - r_2^a}. \end{cases}$$

Finalmente :

$$\mathbb{E}_x\left[z^{T_0 \wedge T_a}\right] = \frac{1 - r_2^a}{r_1^a - r_2^a} r_1^x - \frac{1 - r_1^a}{r_1^a - r_2^a} r_2^x.$$

Nos queda verificar que las dos formulas que hemos obtenido son las mismas. Eso es una consecuencia de la definición de Argch, para $Z \geq 1$ :

$$\text{Argch}(Z) = \ln(Z + \sqrt{Z^2 - 1}) \qquad \text{y} \qquad -\text{Argch}(Z) = \ln(Z - \sqrt{Z^2 - 1})$$

así que tenemos :

$$r_1 = e^{\text{Argch}(1/z)} \qquad \text{y} \qquad r_2 = e^{-\text{Argch}(1/z)}.$$

Sustituyendo en la función generatriz de $T_0 \wedge T_a$, se obtiene al final :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[z^{T_0 \wedge T_a}\right] &= 2\frac{1 - e^{-a\text{Argch}(1/z)}}{\sinh(a\text{Argch}(1/z))} e^{x\text{Argch}(1/z)} - 2\frac{1 - e^{a\text{Argch}(1/z)}}{\sinh(a\text{Argch}(1/z))} e^{-x\text{Argch}(1/z)} \\
&= \frac{\sinh\left(x\text{Argch}\left(1/z\right)\right)}{\sinh\left(a\text{Argch}\left(1/z\right)\right)} + \frac{\sinh\left((a-x)\text{Argch}\left(1/z\right)\right)}{\sinh\left(a\text{Argch}\left(1/z\right)\right)}.
\end{aligned}$$