Probabilidades

23/02/2012

Una medida de probabilidad definida sobre una σ-álgebra $\mathscr{A}$ de Ω es una función $\mathbb{P} : \mathscr{A} \longrightarrow [0,1]$ que satisface:

1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

2) Para toda sucesión numerable A_n de elementos de $\mathscr{A}$, dos a dos disjuntos (es decir, $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$) se tiene: $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$. Esta propiedad de $\mathbb{P}$ se llama *aditividad numerable.*

Sea Ω un conjunto no vacío sin ninguna estructura especial (el espacio de estados), sobre el cual siempre estará definido una σ-álgebra $\mathscr{A}$ (la familia de todos los eventos) y sea $\mathbb{P}$ una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathscr{A})$. La tripleta $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ se llama espacio probabilizado.

Ejercicio 1 — Modelo

1. ¿Cuál es la diferencia entre el espacio de estados Ω y el conjunto de todos los eventos $\mathscr{A}$?, dar un ejemplo. Pensar, por ejemplo, en la experiencia "lanzar un dado".
2. ¿Cuáles son las propiedades de una σ-álgebra?
3. Explique la relación de las propiedades de una σ-álgebra con los eventos de una experiencia aleatoria.
4. ¿Qué es una variable aleatoria?

Ejercicio 2 — Propiedades

Sean A_1, A_2 elementos de una σ-álgebra $\mathscr{A}$, demuestre que:

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = 1$ (A^c es el complemento de A).
2. $\mathbb{P}(A_1) \leq \mathbb{P}(A_2)$ si $A_1 \subset A_2$.
3. $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$.
4. $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{i\geq 1} A_i) \leq \sum\limits_{i\geq 1} \mathbb{P}(A_i)$.

Ejercicio 3 — Intersección

Sea $(\mathcal{G}_\alpha)_{\alpha \in A}$ una familia arbitraria de σ-álgebras definidas sobre Ω. Muestre que $\mathcal{H} = \bigcap\limits_{\alpha \in A} \mathcal{G}_\alpha$ es también una σ-álgebra.

Ejercicio 4 — Leyes de "De Morgan"

Sea A_n una sucesión de conjuntos. Muestre que se tienen las Leyes de "De Morgan"

$$\text{a)} \quad \Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big)^c = \bigcap_{n\geq 1} A_n^c, \qquad \text{b)} \quad \Big(\bigcap_{n\geq 1} A_n\Big)^c = \bigcup_{n\geq 1} A_n^c.$$

Ejercicio 5 — Límites

Sea A_n una sucesión de conjuntos tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $A_n \in \mathscr{A}$. Definimos las cantidades

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{n\geq 1 m} A_m \quad y \quad \liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{n\geq 1 m} A_m$$

1. Muestre que $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n \in \mathscr{A}$, $\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n = \bigcup\limits_{n\geq 1} \bigcap\limits_{n\geq 1 m} A_m \in \mathscr{A}$ y que $\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n \subset \limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$.
2. Supongamos que A_n converge hacia $A \in \mathscr{A}$, muestre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$.

Ejercicio 6 — Principio de Inclusión-Exclusión

Sean los eventos $A_1, ..., A_n$, muestre que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{(i,j):1\leq i<j\leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) \\ &+ \sum_{(i,j,k):1\leq i<j<k\leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n)\end{aligned}$$

Esta fórmula puede también ser interpretada en términos de la cardinalidad (fórmula de la criba de Poincaré), basta reemplazar $\mathbb{P}$ por $Card$ donde $Card(A)$ es el número de elementos del conjunto A.

Ejercicio 7 — Desigualdad

Supongamos que los eventos A, B cumplen $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$ y $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$. Muestre que siempre se tiene

$$\frac{1}{12} \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \frac{1}{3}.$$

Ejercicio 8 — Perturbaciones

Una *perturbación* de un conjunto finito E es toda permutación de E sin punto fijo, es decir toda biyección de E en E tal que para $x \in E$ se tiene $s(x) \neq x$. Por ejemplo para $\{1, 2, 3\}$ tenemos solamente 2 perturbaciones, a saber: $\{2, 3, 1\}$ y $\{3, 1, 2\}$.

1. Utilizando la fórmula de la criba dada en el ejercicio 6 demostrar que el número de perturbaciones de un conjunto E de n elementos es $n!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
2. En una fiesta, la recepción ha confundido los sombreros de los n caballeros invitados. Se ha decidido que al final de la fiesta los sombreros serán entregados al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los caballeros se quejen al día siguiente? ¿La probabilidad de que se quejen $k < n$ caballeros?

Ejercicio 9 — Algebra

Supongamos que Ω es un conjunto infinito (numerable o no) y sea $\mathcal{A}$ la familia de todos los subconjuntos que son tales que o es finito o tiene complemento finito. Muestre que $\mathcal{A}$ es un álgebra pero no una σ-álgebra.