

**L'espace classifiant d'un carquois lié et cohomologie(s) des
algèbres de dimension finie**

par

Juan Carlos Bustamante Rosero

thèse présentée au Département de mathématiques et d'informatique
en vue de l'obtention du grade de Docteur ès Sciences (Ph.D)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, juin 2005

SOMMAIRE

Étant donné un carquois lié (Q, I) , nous lui associons un CW-complexe, que nous notons $\mathcal{B}(Q, I)$ et appelons l'espace classifiant de (Q, I) .

Dans un premier temps nous étudions l'homotopie de $\mathcal{B}(Q, I)$. Plus précisément, nous montrons que son groupe fondamental est isomorphe au groupe fondamental de (Q, I) . Par la suite, nous prouvons qu'à défaut d'être fonctorielle cette construction se comporte bien par rapport aux revêtements de carquois liés.

Dans un deuxième temps, nous considérons un corps k et l'algèbre $A = kQ/I$. Nous montrons alors que, lorsqu'elles sont définies, l'homologie et la cohomologie simpliciale de A coïncident avec l'homologie et la cohomologie de $\mathcal{B}(Q, I)$. Par ailleurs, nous comparons cette dernière à la cohomologie de Hochschild de A . Notamment, nous établissons des conditions suffisantes pour l'existence d'un isomorphisme entre ces différents groupes de cohomologie. Finalement, nous montrons que les homomorphismes mentionnés ci-haut induisent des homomorphismes d'anneaux de cohomologie.

La construction de $\mathcal{B}(Q, I)$, ainsi que la grande majorité des résultats présentés sont contenus dans les articles [15, 16].

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Ibrahim Assem pour avoir accepté de diriger mon travail de recherche, pour la générosité de son temps, de son expertise mathématique dont j'ai été bénéficiaire, et pour son soutien financier. Je désire aussi remercier toute l'équipe d'algèbre de l'Université de Sherbrooke pour l'ambiance dans laquelle ce travail s'est déroulé, ainsi que pour de nombreuses discussions intéressantes, non seulement du point de vue mathématique.

Je remercie l'Institut des Sciences Mathématiques, I.S.M., pour les bourses qui m'ont été octroyées, et qui ont permis de mener à terme ce projet. Également, toute ma gratitude au gouvernement de l'Équateur qui, par une bourse d'exemption des frais de scolarité majorés dans le cadre d'un accord avec le gouvernement du Québec, aura contribué de façon essentielle à la réalisation de ce travail. Par ailleurs, je remercie le bureau du vice-doyen qui m'a appuyé financièrement pour présenter mes premiers résultats au XIV Colloque Latinoaméricain d'Algèbre, qui eut lieu à La Falda, Argentine en août 2001.

Finalement, un bref mot de remerciement à tous ceux qui, de près ou de loin, m'auront encouragé et accompagné pendant les trois dernières années. Je pense notamment à mes parents, mon frère, ma soeur, ma copine E. Maltais, mon ami et parfois collègue F. Huard, entre autres. Plus particulièrement, je pense à mon grand père paternel qui nous a malheureusement quittés l'été dernier, et qui restera pour moi un modèle à plusieurs égards.

Table des matières

SOMMAIRE	ii
REMERCIEMENTS	iii
TABLE DES MATIÈRES	iv
INTRODUCTION	vi
Chapitre 1 — PRÉLIMINAIRES	1
1.1 Carquois	1
1.2 Algèbres de Carquois	3
1.3 Représentations et Modules	7
1.4 Le Groupe Fondamental $\pi_1(Q, I)$	10
Chapitre 2 — L'ESPACE CLASSIFIANT D'UN CARQUOIS LIÉ $\mathcal{B}(Q, I)$	15
2.1 Méthodes Simpliciales et Algèbres	15
2.2 Espaces Classifiants de Petites Catégories	17
2.3 L'Espace Classifiant d'un Carquois Lié	18
2.4 Quelques Remarques	25
Chapitre 3 — HOMOTOPIE	28
3.1 Le cas monomial	28
3.2 Groupes Fondamentaux	33
3.3 Revêtements	45
Chapitre 4 — HOMOLOGIE	51
4.1 Homologie et Cohomologie de $\mathcal{B}(Q, I)$	51
4.2 Homologie Simpliciale d'Algèbres	54

Chapitre 5 — COHOMOLOGIE DE HOCHSCHILD D'ALGÈBRES	66
5.1 Généralités	66
5.2 Comparaison avec la cohomologie simpliciale	70
5.3 Structure d'anneau sur $\mathrm{HH}^*(A)$	86
CONCLUSION	92
BIBLIOGRAPHIE	94

INTRODUCTION

L'introduction, dans les années 70 et 80, des techniques diagrammatiques dues essentiellement à P. Gabriel, est à l'origine de plusieurs avancées significatives en théorie des représentations des algèbres associatives. Plus précisément, si A est une algèbre associative, unifère, sobre et de dimension finie sur un corps algébriquement clos k , alors il existe un unique carquois Q_A et un homomorphisme surjectif (non nécessairement unique) d'algèbres $\nu : kQ_A \rightarrow A$, de noyau $I = \text{Ker } \nu$, de sorte que $A \simeq kQ/I$ (voir [13], par exemple). La paire (Q, I) est alors appelée une présentation de Q , et on dira que (Q, I) est un carquois lié.

Étant donnée une présentation (Q, I) d'une algèbre A , on lui associe un groupe fondamental, qu'on note naturellement $\pi_1(Q, I)$. Cette construction a été introduite au début des années 80 par Green, et Martínez - Villa et de la Peña (voir [36, 43]). Une algèbre triangulaire dont toute présentation (Q, I) a un groupe fondamental trivial est dite simplement connexe. Les algèbres simplement connexes jouent un rôle crucial en théorie des représentations des algèbres associatives. En effet, il est souvent possible, par le biais de techniques de revêtements (voir [13, 52]), de ramener l'étude des modules sur une algèbre A à celle des modules sur une algèbre simplement connexe \hat{A} convenablement choisie.

D'autre part, étant donnée une algèbre associative A , G. Hochschild a introduit dans [39] les groupes d'homologie et de cohomologie de A à coefficients dans un $A - A$ -bimodule M . Ces groupes sont notés $\text{HH}_i(A, M)$ et $\text{HH}^i(A, M)$, respectivement, et sont appelés les groupes d'homologie et de cohomologie de Hochschild de A . Les groupes correspondant aux bas degrés, c'est-à-dire $i = 0, 1$ et 2 , ont des interprétations claires en termes de structures classiques, comme, par exemple, dérivations ou extensions [1, 38, 49]. En outre, le premier groupe de cohomologie de Hochschild d'une algèbre A à coefficients dans le bimodule ${}_A A_A$, noté $\text{HH}^1(A)$ donne aussi de l'information au sujet de la connexité simple de A voir [4, 25].

Par ailleurs, dans [14], Bretscher et Gabriel ont introduit des méthodes d'homologie simpliciale pour l'étude des algèbres schuriennes de dimension finie. Plus généralement, dans [44, 42], cette construction a été généralisée aux algèbres admettant des bases semi-normées. Ainsi, pour une telle algèbre A , il est possible de définir les groupes d'homologie

et de cohomologie simpliciale avec coefficients dans un groupe abélien G . Ces groupes sont notés $\mathrm{SH}_i(A)$, et $\mathrm{SH}^i(A, G)$, respectivement. Comme on peut s'en douter, ces derniers sont étroitement liés à la connexité simple de A , et à l'existence de bases multiplicatives.

Des résultats dans [4, 14, 15, 25, 34, 40], entre autres, établissent divers liens entre les groupes mentionnés ci-haut. À titre indicatif, et parce qu'elles se trouvent à l'origine de ce travail, mentionnons le cas des algèbres d'incidence $A = k(E)$ des ensembles ordonnés (E, \leq) . Dans ce cas-ci ces relations sont les meilleures possibles. En effet, Gerstenhaber et Schack ont montré dans [34] que les groupes de cohomologie de Hochschild $\mathrm{HH}^i(A)$ sont isomorphes aux groupes de cohomologie simpliciale du complexe simplicial des chaînes non vides de E à coefficients dans le groupe additif sous-jacent au corps k . Il s'avère que ces groupes sont précisément les groupes de cohomologie simpliciale de A à coefficients dans k . Par ailleurs, si (Q_E, I) désigne une présentation de A , le groupe fondamental du dit complexe est isomorphe au groupe fondamental de (Q_E, I) . Ce résultat a été établi simultanément par E. Reynaud dans [50] et, dans un contexte plus général, par l'auteur de cette thèse dans [15].

Le but de cette thèse est d'étudier les groupes fondamentaux de carquois liés (Q, I) ainsi que les groupes de cohomologie simpliciale et de Hochschild de l'algèbre $A = kQ/I$, et d'établir, dans des contextes plus généraux, des résultats analogues à ceux mentionnés dans le paragraphe précédent. Pour ce faire, étant donné un carquois lié (Q, I) , nous lui associons un espace topologique qu'on notera $\mathcal{B}(Q, I)$.

Dans le chapitre 1 nous fixons les notations et la terminologie. Nous commençons par une brève exposition de notions reliées aux carquois liés, ainsi que des liens existants entre ceux-ci et les algèbres associatives et leurs représentations. Notamment, nous rappelons la définition de la relation d'homotopie associée à un carquois lié, ce qui mène à la définition du groupe fondamental d'un carquois lié. Ces concepts seront au coeur des chapitres 2 et 3.

Le chapitre 2 débute par une très brève exposition de certaines méthodes d'homologie simpliciale utilisées en théorie des représentations des algèbres. Celle-ci a pour but de motiver la construction du CW-complexe que nous appelons l'espace classifiant d'un carquois lié. Il s'agit là du modèle géométrique mentionné ci-haut, et constitue le coeur de cette thèse.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude de l'homotopie de $\mathcal{B} = \mathcal{B}(Q, I)$. Ainsi, dans un premier temps nous comparons les groupes fondamentaux $\pi_1(\mathcal{B}(Q, I))$ et $\pi_1(Q, I)$. En fait, nous prouvons le théorème suivant ([16]):

Théorème 3.2.3 *Soient (Q, I) un carquois lié, et $\mathcal{B} = \mathcal{B}(Q, I)$ son espace classifiant. Alors les groupes $\pi_1(Q, I)$ et $\pi_1(\mathcal{B})$ sont isomorphes.*

Comme il a été mentionné plus haut, ce résultat généralise des résultats précédents concernant les algèbres d'incidence ([50]) et les algèbres schuriennes triangulaires ([15]). Par ailleurs, celui-ci nous permet d'obtenir des outils de calcul en vue de déterminer

les groupes fondamentaux des carquois liés. Dans un deuxième temps, nous étudions les revêtements de carquois liés. Plus précisément, nous montrons qu'un morphisme de revêtement de carquois liés $p : (\hat{Q}, \hat{I}) \rightarrow (Q, I)$ induit un revêtement $\mathcal{B}_p : \mathcal{B}(\hat{Q}, \hat{I}) \rightarrow \mathcal{B}(Q, I)$ d'espaces topologiques. Le résultat principal de la section 3.3 est le théorème suivant ([16]):

Théorème 3.3.10 *Soit $p : (\hat{Q}, \hat{I}) \rightarrow (Q, I)$ un revêtement galoisien donné par l'action d'un groupe G . Alors, $(\hat{\mathcal{B}}, \mathcal{B}_p)$ est un revêtement régulier de \mathcal{B} et $\text{Cov}(\hat{\mathcal{B}}/\mathcal{B}) \simeq G$.*

Le chapitre 4 est consacré à l'homologie et la cohomologie simpliciale des algèbres possédant des bases semi-normées. Nous commençons ce chapitre avec une description détaillée de ces constructions qui auront été ébauchées au chapitre 2. Par la suite, nous montrons que les bases semi-normées sont étroitement liées à la relation d'homotopie. Ceci nous mène naturellement à la comparaison de l'homologie et la cohomologie simpliciale d'une algèbre avec l'homologie et la cohomologie de $\mathcal{B}(Q, I)$. Nous prouvons alors le résultat suivant ([16]).

Corollaire 4.2.8 *Soit $A = kQ/I$ une algèbre ayant une base semi-normée. Alors, pour tout groupe abélien G , et tout $i \geq 0$ il existe des isomorphismes de groupes abéliens*

- a) $H_i(\mathcal{B}) \simeq \text{SH}_i(A)$, et
- b) $H^i(\mathcal{B}, G) \simeq \text{SH}^i(A, G)$, pour tout groupe abélien G .

Finalement, au chapitre 5 nous étudions la cohomologie de Hochschild des algèbres $A = kQ/I$. Plus précisément, nous comparons celle-ci à la cohomologie simpliciale de A à coefficients dans k^+ , dans le même esprit que [34, 42]. Le résultat principal de ce chapitre est le suivant ([16]), qui généralise un théorème dû à Gerstenhaber et Schack [34].

Théorème 5.2.11 *Soit $A = kQ/I$ une algèbre schurienne semi-commutative. Alors, pour tout $i \geq 0$, il existe un isomorphisme de groupes abéliens*

$$H^i(\epsilon) : \text{SH}^i(A, k^+) \xrightarrow{\sim} \text{HH}^i(A) .$$

Ceci nous permet de donner des preuves courtes à forte inspiration topologique de certains résultats connus concernant la cohomologie de Hochschild des algèbres. Nous étudions ensuite la structure d'anneau de $\text{HH}^*(A) = \bigoplus_i \text{HH}^i(A)$. Nous montrons notamment que les isomorphismes $H^i(\epsilon)$ mentionnés ci-haut donnent lieu à un isomorphisme d'anneaux de cohomologie.

L'ensemble des résultats de ce travail fournit donc une interprétation géométrique claire de notions comme les groupes fondamentaux de carquois liés, et les groupes d'homologie et cohomologie simpliciale et de Hochschild d'une algèbre de dimension finie.

Chapitre 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous présentons des notions de base qui seront utilisées constamment par la suite. Notamment, nous fixons les notations et la terminologie. Dans la première section, nous définissons la notion de carquois. Dans la deuxième section, nous présentons des liens entre algèbres associatives et carquois liés. Dans le même esprit, à la section trois, nous introduisons la notion de représentation linéaire d'un carquois lié, et nous verrons que celles-ci forment une catégorie équivalente à la catégorie des modules sur l'algèbre du carquois lié. Finalement, nous abordons une notion topologique associée à un carquois lié : la relation d'homotopie sur l'ensemble des chemins du carquois. Celle-ci nous permet de définir le groupe fondamental d'un carquois lié, et se trouve au coeur de ce qui suit. On pourra consulter [8, 7] et [43], par exemple, pour plus d'informations à ces sujets.

1.1 Carquois

Définition 1.1.1 *Un carquois Q est un quadruplet $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$ où Q_0 et Q_1 sont des ensembles, et s et b des applications $s, b : Q_1 \rightarrow Q_0$. Les éléments de Q_0 sont appelés les **points** de Q , et ceux de Q_1 ses **flèches**.*

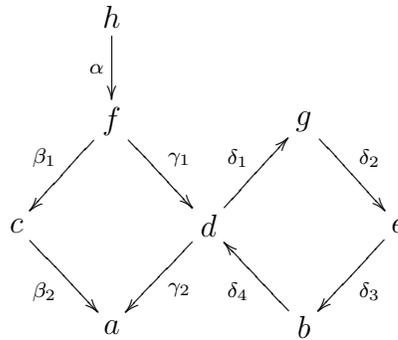
Étant donnée une flèche α de Q , le point $s(\alpha)$ est la **source** de α , le point $b(\alpha)$ son **but**, et nous écrirons $\alpha : x \rightarrow y$. Un carquois Q est fini si les ensembles Q_0 et Q_1 le sont. Par la suite, on écrira simplement Q au lieu de (Q_0, Q_1, s, b) . En outre, un carquois Q est dit **connexe** si le graphe sous-jacent à Q est un graphe connexe. Si x et y sont deux points d'un carquois Q , un **chemin** de x à y est une suite de flèches $w = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r$ telle que $s(\alpha_1) = x$, $b(\alpha_r) = y$, et $s(\alpha_{i+1}) = b(\alpha_i)$, pour tout i tel que $1 \leq i < r$. Dans

cette situation, le point x sera naturellement appelé la **source** de w et y son **but**. Un chemin d'un point vers lui-même sera appelé un **cycle orienté**, tandis que deux chemins distincts u et v tels que la source et le but de u coïncident avec la source et le but de v , respectivement, seront dits des chemins **parallèles**. Un carquois n'ayant pas de cycles orientés sera dit **triangulaire**.

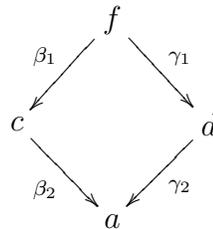
Définition 1.1.2 *Étant donné un carquois $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$, un sous-carquois de Q est la donnée d'un carquois $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', b')$ tel que $Q'_0 \subseteq Q_0$, $Q'_1 \subseteq Q_1$, et $s|_{Q'_1} = s'$, $b|_{Q'_1} = b'$. De plus, Q' sera dit un sous-carquois **plein** si Q'_1 est l'ensemble de toutes les flèches de Q dont le but et la source sont dans Q'_0 . Par ailleurs, Q' sera dit **convexe** si, pour tout chemin $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ de x vers y , avec $x, y \in Q'_0$, on a que $s(\alpha_i) \in Q'_0$ pour tout i tel que $1 \leq i \leq r$.*

Exemples 1.1.3

a) Soit Q le carquois suivant:



Les chemins $\alpha\beta_1\beta_2$ et $\alpha\gamma_1\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4\gamma_2$ sont parallèles. Le carquois Q' :



est un sous-carquois de Q . En fait, il s'agit du sous-carquois plein engendré par l'ensemble de points $\{a, c, d, f\}$. Cependant, Q' n'est pas convexe dans Q . En effet, le chemin $\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4$ a ses extrémités dans Q , mais les points g, e , et b ne s'y trouvent pas. Le carquois Q' est triangulaire, tandis que Q possède un cycle orienté, à savoir $\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4$.

- b) À un ensemble ordonné (E, \leq) on associe un carquois Q_E de la façon suivante : les points de Q_E sont les éléments de E , et, pour deux points x, y de Q_E il y a une flèche $\rho_y^x : x \rightarrow y$ si et seulement si $x > y$, et il n'existe pas d'élément $z \in E \setminus \{x, y\}$ vérifiant $x > z > y$. Dans ce cas, on dira que x **couvre** y . Autrement dit, Q_E est le diagramme de Hasse de (E, \leq) , avec les flèches orientées des "grands" éléments vers les "petits".

1.2 Algèbres de Carquois

Soient k un corps commutatif, et Q un carquois fini. L'**algèbre des chemins** de Q , notée kQ , est définie de la façon suivante : kQ est le k -espace vectoriel ayant comme base l'ensemble de tous les chemins dans Q , y compris un chemin stationnaire pour chaque sommet x de Q , qu'on note ε_x . La multiplication de deux chemins est définie comme étant leur juxtaposition, lorsque celle-ci est possible, et 0 autrement. Le prolongement de cette opération par k -linéarité confère à kQ une structure de k -algèbre associative et unifière. Il est aisé de vérifier que $1_{kQ} = \sum_{x \in Q_0} \varepsilon_x$, et que kQ est de dimension finie si et seulement si Q n'a pas de cycles orientés.

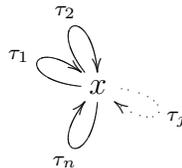
Exemples 1.2.1

- a) Soit Q le carquois

$$n \xrightarrow{\alpha_n} n-1 \xrightarrow{\alpha_{n-1}} n-2 \longrightarrow \dots \qquad \dots \xrightarrow{\alpha_3} 2 \xrightarrow{\alpha_2} 1.$$

Une base de kQ est alors donnée par l'ensemble des paires d'entiers (i, j) telles que $1 \leq i \leq j \leq n$. La multiplication de deux éléments de base est donnée par la règle $(i, j)(k, l) = (i, l)$ si $j = k$, et 0 autrement. En identifiant la paire (i, j) à la matrice E_{ij} ayant l'élément 1 en position (i, j) , et 0 ailleurs, on induit un isomorphisme entre kQ et $T_n(k)$, l'algèbre des matrices triangulaires inférieures de taille $n \times n$ à coefficients dans k . Il s'agit de l'algèbre d'incidence de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ muni de l'ordre usuel (voir exemple 1.2.1 d)).

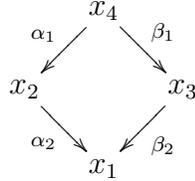
- b) Soit Q le carquois comportant un seul point et n boucles



La base de kQ est alors l'ensemble des mots de longueur finie sur l'alphabet $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$, y compris le mot vide ε_x . Il est alors aisé de vérifier que kQ est isomorphe à la k -algèbre associative libre en n indéterminées, notée $k \langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$.

Considérons maintenant l'idéal bilatère engendré par les éléments de la forme $\tau_i\tau_j - \tau_j\tau_i$, avec $i \neq j$. Alors kQ/I est isomorphe à l'algèbre $k[t_1, t_2, \dots, t_n]$ des polynômes en n indéterminées.

- c) Soit $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ muni de la relation d'ordre $x_1 \leq x_i$ et $x_i \leq x_4$, pour $i \in \{2, 3\}$. Le carquois Q_E est alors



Considérons l'idéal $I = \langle \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 \rangle$. Il est aisé de vérifier que kQ_E/I est isomorphe à la sous-algèbre de $M_4(k)$ formée par les matrices de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

L'algèbre kQ_E/I est alors appelée l'**algèbre d'incidence** de (E, \leq) .

- d) Plus généralement, soit (E, \leq) un ensemble ordonné, avec $|E| = n$, fini. L'**algèbre d'incidence** de E , notée $k(E)$, est obtenue de la façon suivante: soit I l'idéal bilatère de kQ_E engendré par les éléments de la forme $w_1 - w_2$ avec w_1 et w_2 des chemins parallèles. L'algèbre $k(E)$ est alors définie comme étant le quotient kQ_E/I . De façon alternative, on peut décrire $k(E)$ comme la sous-algèbre de $M_n(k)$ dont les éléments sont les matrices (a_{ij}) telles que $a_{ij} = 0$ si $i \not\leq j$. Notamment, les algèbres des exemples a) et c) sont des algèbres d'incidence.

Soit F l'idéal bilatère de kQ engendré par l'ensemble des flèches de Q . Ainsi, en particulier $E = kQ/F$ est une k -algèbre commutative semi-simple. Plus précisément, $E = \coprod_{x \in Q_0} \varepsilon_x k \varepsilon_x$.

Définition 1.2.2 Un idéal bilatère $I \trianglelefteq kQ$ est dit **admissible** s'il existe un entier naturel $n \geq 2$ tel que $F^n \subseteq I \subseteq F^2$.

Dans l'exemple 1.2.1 b), l'idéal I n'est pas admissible: bien que l'on ait $I \subseteq F^2$, il n'existe pas d'entier r tel que $F^r \subseteq I$. Par contre, soit m un entier positif fixe, $m \geq 2$. Alors l'idéal $J = I + \langle \tau_i^m \mid 1 \leq i \leq n \rangle$ est admissible, et dans ce cas on a $kQ/J \simeq k[t_1, \dots, t_n] / \langle t_1^m, \dots, t_n^m \rangle$.

En pratique, l'idéal I est spécifié par un ensemble de générateurs. Ceci nous mène à la définition suivante.

Définition 1.2.3 *Soient Q un carquois lié, et x, y deux sommets de Q . Une **relation** de x à y est une combinaison linéaire de chemins parallèles distincts de x vers y , de longueur au moins 2.*

Une relation comportant un seul terme sera dite **monomiale**, tandis qu'une comportant deux termes sera dite **binomiale**. Une relation binomiale de la forme $w_1 - w_2$ sera dite une **relation de commutativité**. Si l'idéal I est engendré par des relations monomiales, on dira qu'il s'agit d'un **idéal monomial**. Un chemin w ne se trouvant pas dans l'idéal I sera dit un **chemin non nul**.

Dans ce contexte, on dira que le carquois Q est lié par les relations qui engendrent I , ou encore que la paire (Q, I) est un **carquois lié**, et, tout naturellement, que l'algèbre $A = kQ/I$ est l'algèbre du carquois lié (Q, I) . Le morphisme canonique $\nu : kQ \rightarrow A$ de noyau I , est appelé une **présentation** de l'algèbre A . Souvent, par abus de langage, on dira que le carquois lié (Q, I) est une présentation de A . Dans ce cas, nous avons une décomposition de l'unité de A :

$$1_A = 1_{kQ/I} = 1_{kQ} + I = \left(\sum_{x \in Q_0} \varepsilon_x \right) + I = \sum_{x \in Q_0} (\varepsilon_x + I).$$

Il est aisé de vérifier qu'il s'agit là d'une décomposition de 1_A en somme d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux. Afin d'alléger les notations, nous écrirons e_x au lieu de $\varepsilon_x + I$. Avec ces notations, la décomposition de 1_A fournit une décomposition du A -module A :

$$A = 1_A A = \left(\sum_{x \in Q_0} e_x \right) A = \bigoplus_{x \in Q_0} e_x A.$$

de sorte que les $e_x A$ sont les A -modules (à droite) projectifs indécomposables.

Définition 1.2.4 *Une algèbre de carquois lié $A = kQ/I$ telle que Q n'a pas de cycle orienté est appelée une algèbre **triangulaire**.*

Le procédé décrit ci-haut fournit un moyen d'obtenir une énorme classe d'algèbres. On remarquera que la même construction a du sens si l'on suppose que k est tout simplement un anneau commutatif. Dans cette situation, au lieu de parler de k -espace vectoriel on parlera de k -module libre. Cependant, le procédé décrit ci-haut est particulièrement intéressant pour l'étude des algèbres de dimension finie sur des corps algébriquement clos. Afin de l'illustrer, nous énonçons le théorème suivant, sans toutefois en donner la démonstration. Le lecteur pourra consulter [13], par exemple.

Théorème 1.2.5 (Gabriel). *Soit A une k -algèbre de dimension finie, sobre et connexe sur un corps algébriquement clos k . Alors, il existe un (unique) carquois Q_A et un homomorphisme surjectif d'algèbres $\nu : kQ_A \rightarrow A$ tels que $I = \text{Ker } \nu$ est admissible.*

□

Soient (Q, I) un carquois lié et $A = kQ/I$ l'algèbre correspondante. Il est souvent pratique d'identifier A à son **spectroïde** $\text{spec}(A)$, qui est la catégorie k -linéaire définie comme suit : la classe d'objets $\text{spec}(A)_0$ de $\text{spec}(A)$ est Q_0 , l'ensemble des points de Q . D'autre part, étant donnés deux objets $x, y \in \text{spec}(A)_0$, soit $kQ(x, y)$ le k -espace vectoriel ayant pour base l'ensemble des chemins de x vers y , et $I(x, y) = kQ(x, y) \cap I$. L'ensemble des morphismes $\text{Hom}_{\text{spec}(A)}(x, y)$ qu'on notera $A(x, y)$ est alors l'ensemble $kQ(x, y)/I(x, y)$. La composition de deux morphismes $f : x \rightarrow y$ et $g : y \rightarrow z$, est alors donnée par le produit fg dans A . Ainsi, la composition des morphismes dans $\text{spec}(A)$ se fait dans le sens opposé à celui de la multiplication des éléments de A . Ayant à l'esprit cette dernière remarque, nous confondons par la suite une algèbre A et son spectroïde $\text{spec}(A)$. Il est aisé de vérifier que

$$A(x, y) = \text{Hom}_A(e_y A, e_x A) \simeq e_x A e_y.$$

Une sous-catégorie A' de A est dite **convexe** si lorsque x et z sont deux objets de A' et $f : x \rightarrow y, g : y \rightarrow z$ deux morphismes de A , alors l'objet y est dans A' . Il est clair que les sous-catégories convexes de $A = kQ/I$ correspondent aux sous-carquois Q' convexes dans Q liés par $I' = I \cap kQ'$.

Si Q' est un sous-carquois plein de Q , considérons l'idéal $I' = I \cap kQ'$, et soit $A' = kQ'/I'$. On dira alors que A' est une sous-catégorie pleine de A , et si en plus Q' est convexe dans Q , il en sera de même pour A' dans A .

Définition 1.2.6 *Soit $A = kQ/I$ une algèbre.*

- a) A est dite **schurienne** si pour toute paire de points $x, y \in Q_0$ on a $\dim_k e_x A e_y \leq 1$.
- b) A est dite **presque triangulaire** si pour toute paire de points $x, y \in Q_0$, on a que $e_x(\text{rad } A)e_y \neq 0$ entraîne $e_y(\text{rad } A)e_x = 0$.

En termes de carquois liés, il est facile de voir qu'une algèbre $A = kQ/I$ est schurienne si et seulement si pour toute paire de points x, y de Q , il existe, à multiple scalaire près, au plus un chemin non nul de x vers y . Notamment, étant donné que pour tout point x de Q , il existe toujours au moins un chemin non nul de x vers x , à savoir le chemin stationnaire ε_x , si A est une algèbre schurienne, il n'y a pas de boucles dans le carquois Q . Pour la même raison, s'il existe un cycle orienté w , de longueur $l > 1$ dans Q , alors toutes les compositions des l flèches formant w doivent être nulles (voir exemple 1.2.7 d.)). Une remarque immédiate est que toute algèbre triangulaire est presque triangulaire, mais la réciproque n'est pas vraie, comme le montre l'exemple 1.2.7 d).

Exemples 1.2.7

a) Soit Q le carquois

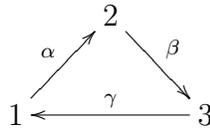


lié par $I = \langle \alpha^4 \rangle$. L'algèbre A n'est pas presque triangulaire (on comparera avec la définition de presque triangularité dans [15]).

b) Les algèbres d'incidence d'ensembles ordonnés sont des algèbres schuriennes, et triangulaires.

c) Si Q est un arbre, alors, pour tout idéal I de kQ , l'algèbre $A = kQ/I$ est une algèbre schurienne triangulaire.

d) Soit Q le carquois



lié par $I = \langle \gamma\alpha, \alpha\beta, \beta\gamma \rangle$. Il est clair que A est schurienne presque triangulaire, mais pas triangulaire.

e) Le même carquois lié par l'idéal $I' = \langle \alpha\beta, \beta\gamma \rangle$ donne lieu à une algèbre schurienne qui n'est pas presque triangulaire. En effet, dans ce cas nous avons $\dim_k e_3 A e_2 = \dim_k e_2 A e_3 = 1$.

1.3 Représentations et Modules

Comme les catégories des modules ne seront pas au coeur de ce qui suit, nous nous contentons d'en faire une très brève mention. Le but de ceci est double. D'une part, il s'agit d'illustrer l'utilité des carquois liés en théorie des représentations, dans le même esprit que le théorème 1.2.5. Par ailleurs, nous aurons besoin de la notion d'extension ponctuelle d'une algèbre par un module. Nous exposerons cette construction à la fin de cette section.

On définit la catégorie des chemins $\mathcal{P}(Q)$ de Q comme suit. Les objets de $\mathcal{P}(Q)$ sont les points de Q , et, pour $x, y \in \mathcal{P}(Q)_0$, l'ensemble des morphismes $\mathcal{P}(Q)(x, y)$ est égal à l'ensemble des chemins de x vers y dans Q , y compris un chemin stationnaire ε_x correspondant à chaque sommet de Q . La composition des morphismes est induite par la juxtaposition des chemins. On remarquera alors que $\text{spec}(kQ)$ est la k -linéarisation de $\mathcal{P}(Q)$ (voir [30]).

Définition 1.3.1 Une représentation k -linéaire d'un carquois Q est un foncteur $M : \mathcal{P}(Q) \rightarrow \text{Mod} - k$.

Une représentation M est dite de **dimension finie** si pour tout point x de Q on a que $M(x)$ est un k -espace vectoriel de dimension finie. Soit I un idéal admissible de kQ . Une représentation M de Q sera dite **liée par l'idéal I** si pour toute relation $\rho = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$ de I , on a que **l'évaluation de M en ρ** , notée $M(\rho)$ et définie par $M(\rho) = \sum_{i=1}^n \lambda_i M(w_i)$, est l'application linéaire nulle.

Un morphisme de représentations est un morphisme fonctoriel $f : M \rightarrow N$. Avec la composition évidente des morphismes, la classe des représentations de Q devient une catégorie qu'on note $\text{Rep}(Q)$. Par ailleurs, la sous-catégorie pleine des représentations de Q liées par l'idéal I est notée $\text{Rep}(Q, I)$. On note aussi par $\text{rep}(Q)$ et $\text{rep}(Q, I)$ les sous-catégories pleines de $\text{Rep}(Q)$ et $\text{Rep}(Q, I)$ formées par les représentations de dimension finie.

Il suit du fait que $\text{spec}(kQ)$ est la k -linéarisation de $\mathcal{P}(Q)$ que la donnée d'une représentation k -linéaire de (Q, I) équivaut à la donnée d'un foncteur k -linéaire $M : \text{spec}(kQ/I) \rightarrow \text{Mod} - k$.

L'intérêt des catégories mentionnées ci-haut suit du résultat suivant (voir [27], par exemple).

Théorème 1.3.2 (Gabriel) *Soit $A = kQ/I$ une algèbre. Alors on a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod} - A & \xrightarrow{\sim} & \text{Rep}(Q, I) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{mod} - A & \xrightarrow{\sim} & \text{rep}(Q, I) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des équivalences de catégories et les flèches verticales les inclusions.

□

En vertu du résultat précédent, nous identifierons par la suite les représentations du carquois lié (Q, I) aux modules sur l'algèbre $A = kQ/I$.

Exemples 1.3.3 Soit (Q, I) un carquois lié, et $A = kQ/I$.

- a) Étant donné un sommet x de Q , la représentation **projective** indécomposable correspondant au sommet x , qu'on note P_x est définie sur les objets de $\text{spec}(kQ/I)$:

$$P_x(t) = \langle w + I \mid w \text{ est un chemin de } x \text{ à } t \rangle$$

et, étant donné un chemin $w : s \rightarrow t$, l'application $P_x(w) : P_x(s) \rightarrow P_x(t)$ est définie par $\sum \lambda_i (v_i + I) \mapsto \sum \lambda_i (v_i w + I)$.

b) Dans la même situation, la représentation **simple** de (Q, I) en x , qu'on note S_x est définie par :

$$S_x(t) = \begin{cases} k & \text{si } t = x, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et $S_x(\alpha) = 0$ pour toute flèche α de Q .

Dans l'équivalence du théorème précédent, les A -modules correspondant aux représentations projectives indécomposables et simples décrites ci-haut sont les A -modules projectifs indécomposables et simples correspondant à l'idempotent e_x de A :

$$P_x \simeq e_x A \quad \text{et} \quad S_x \simeq \frac{e_x A}{\text{rad } e_x A}$$

Étant donnée une algèbre $B = kQ_B/I_B$ et un B -module M , le procédé suivant montre comment obtenir une nouvelle algèbre.

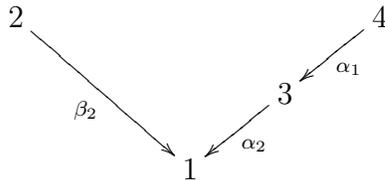
Définition 1.3.4 Soit B une algèbre, et M un B -module à droite. **L'extension ponctuelle de B par M est l'algèbre de matrices**

$$A = B[M] = \begin{bmatrix} B & 0 \\ M & k \end{bmatrix}$$

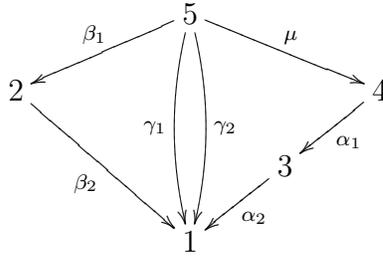
où l'addition est l'addition matricielle usuelle, et la multiplication est induite par la structure de B -module de M .

Dans la situation qui précède, le carquois Q_A s'obtient à partir de Q_B en ajoutant une nouvelle source x qui est telle que $\text{rad } e_x A \simeq M$.

Exemple 1.3.5 Soit Q le carquois



lié par l'idéal $I = \langle \alpha_1 \alpha_2 \rangle$, et soit $B = kQ/I$. Considérons le B -module $M = S_1 \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus P_4$. L'extension $A = B[M]$ est l'algèbre du carquois



lié par l'idéal $\langle \beta_1\beta_2, \alpha_1\alpha_2 \rangle$.

On définit de façon duale la notion de co-extension ponctuelle.

1.4 Le Groupe Fondamental $\pi_1(Q,I)$

Soit (Q,I) un carquois lié, avec Q connexe, son groupe fondamental est défini (voir [43, 36]) de la façon suivante : étant donnée une flèche $\alpha : x \rightarrow y$ dans Q , on désigne par α^{-1} son inverse formelle, c'est-à-dire $\alpha^{-1} : y \rightarrow x$. Pour deux points x , et y de Q , une **marche** de x vers y est une suite de flèches et d'inverses formelles de flèches $w = \alpha_1^{\epsilon_1} \alpha_2^{\epsilon_2} \cdots \alpha_n^{\epsilon_n}$, avec $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$, telle que la source de $\alpha_1^{\epsilon_1}$ est x , le but de $\alpha_n^{\epsilon_n}$ est y , et le but de $\alpha_i^{\epsilon_i}$ est la source de $\alpha_{i+1}^{\epsilon_{i+1}}$ pour tout i tel que $1 \leq i < n$. Soit $\rho = \sum_{i=1}^r \lambda_i w_i \in I(x,y)$ une relation de x vers y . Celle-ci est dite **minimale** si $r \geq 2$ et si pour tout sous-ensemble propre et non vide J de l'ensemble d'indices $\{1, 2, \dots, r\}$ on a $\sum_{i \in J} \lambda_i w_i \notin I(x,y)$. Notamment, les scalaires apparaissant dans une relation minimale sont tous non nuls. Ceci nous mène à la définition suivante.

Définition 1.4.1 Soit (Q,I) un carquois lié. Sur l'ensemble des marches dans Q , la relation **d'homotopie** est la plus petite relation d'équivalence \sim vérifiant les conditions suivantes

- a) Pour toute flèche $\alpha : x \rightarrow y$, on a $\alpha\alpha^{-1} \sim \varepsilon_x$ et $\alpha^{-1}\alpha \sim \varepsilon_y$;
- b) Pour toute relation minimale $\sum_{i=1}^r \lambda_i w_i$ on a $w_i \sim w_j$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, r\}$,
- c) Si u, v, w et w' sont des marches avec $w \sim w'$, alors $uwv \sim uw'v$, lorsque ces compositions ont un sens.

Étant donnée une marche w dans Q , nous sa classe d'homotopie sera notée \tilde{w} . Considérons maintenant un sommet fixe x_0 de Q , et désignons par $\mathcal{M}(Q, x_0)$ l'ensemble des marches dans Q ayant x_0 comme source et but. La juxtaposition des marches est une opération dans $\mathcal{M}(Q, x_0)$, qui acquiert ainsi une structure de groupe. En vertu de la troisième condition dans la définition de la relation d'homotopie, cette dernière est compatible avec la juxtaposition des marches, de sorte que le quotient $\mathcal{M}(Q, x_0) / \sim$ est un

groupe. Celui-ci est appelé le **groupe fondamental** du carquois lié (Q, I) au point x_0 , et est noté $\pi_1(Q, I, x_0)$. Si x_1 est un autre point de Q , il existe, en vertu de la connexité de ce dernier, une marche v de x_0 vers x_1 . Il est alors aisé de vérifier que l'application $\phi : \pi_1(Q, I, x_0) \rightarrow \pi_1(Q, I, x_1)$ définie par $\tilde{w} \mapsto \widetilde{v^{-1}wv}$ est un isomorphisme de groupes. Ainsi, le groupe fondamental d'un carquois lié connexe est indépendant du choix de point de base. En conséquence, nous écrivons simplement $\pi_1(Q, I)$.

Une remarque importante s'impose avant de donner quelques exemples. La définition de la relation d'homotopie dépend essentiellement des relations minimales, et donc de l'ensemble des générateurs de l'idéal I . Or ceux-ci ne sont pas uniques en général, et il peut bien arriver que l'on ait un carquois Q et deux idéaux différents I_1 , et I_2 tels que $kQ/I_1 \simeq kQ/I_2$, mais $\pi_1(Q, I_1) \not\simeq \pi_1(Q, I_2)$ (voir exemples 1.4.2 b) et c)). Autrement dit, le groupe fondamental est un invariant du carquois lié, mais n'est pas un invariant de l'algèbre.

Exemples 1.4.2

- a) Il suit de la définition que les relations monomiales ne sont jamais minimales. Ainsi, si (Q, I) est un carquois lié, avec I un idéal monomial, la relation d'homotopie induite par ce dernier est triviale. Le groupe fondamental $\pi_1(Q, I)$ est alors isomorphe au groupe fondamental $\pi_1(Q)$ du graphe sous-jacent à Q considéré comme espace topologique. Rappelons que la caractéristique d'Euler du graphe Q est $\chi(Q) = 1 - |Q_0| + |Q_1|$. Il est bien connu (voir [55, 45], ou exemple 3.2.1) que le groupe $\pi_1(Q)$ est isomorphe au groupe libre en $\chi(Q)$ générateurs.
- b) Soit Q le carquois suivant

$$3 \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xleftarrow{\gamma} \end{array} 2 \xrightarrow{\alpha} 1$$

lié par l'idéal $I_1 = \langle \beta\alpha \rangle$, et $A_1 = kQ/I_1$. L'idéal I_1 étant monomial, nous avons $\pi_1(Q, I_1) \simeq \pi_1(Q) \simeq \mathbb{Z}$. Par ailleurs, considérons le morphisme de k -algèbres $\nu_2 : kQ \rightarrow A_1$ défini par

$$\nu_2(c) = \begin{cases} (\beta + \gamma) + I_1 & \text{si } c = \beta, \\ c + I_1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et soit $I_2 = \text{Ker} \nu_2$ son noyau. Il s'agit d'un homomorphisme surjectif, de sorte que $kQ/I_2 \simeq A_1$. Nous avons $\nu_2((\beta - \gamma)\alpha) = (\beta + \gamma)\alpha - \gamma\alpha + I_1 = I_1$. Ainsi, $(\beta - \gamma)\alpha$ est dans I_2 et c'est en fait une relation minimale. Il suit alors que dans $\pi_1(Q, I_2)$ nous avons $\beta\alpha \sim \gamma\alpha$, ce qui donne $\beta\gamma^{-1} \sim e_3$, et donc $\pi_1(Q, I_2) = 1$.

- c) Soit Q le carquois

$$4 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_3} \\ \xleftarrow{\beta_3} \end{array} 3 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_2} \\ \xleftarrow{\beta_2} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_1} \\ \xleftarrow{\beta_1} \end{array} 1$$

et $I_1 = \langle \alpha_3\beta_2 - \beta_3\alpha_2, \alpha_2\beta_1 - \beta_2\alpha_1, \beta_3\beta_2\beta_1 - \alpha_3\alpha_2\alpha_1 \rangle$. Un calcul direct montre que $\pi_1(Q,I_1) \simeq \mathbb{Z}_3$.

D'autre part, considérons le morphisme $\nu_2 : kQ \rightarrow kQ/I_1$ défini par

$$\nu_2(c) = \begin{cases} (\alpha_3 - \beta_3) + I_1 & \text{si } c = \alpha_3, \\ c + I_1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est alors aisé de vérifier que $\alpha_3\alpha_2 + \beta_2\alpha_2 - \beta_3\beta_2$, $\alpha_3\beta_2 + \beta_3\beta_2 - \beta_3\beta_2$, et $\alpha_3\alpha_2\alpha_1 + \beta_3\alpha_2\alpha_1$ sont dans $I_2 = \text{Ker } \nu_2$ et qu'il s'agit de relations minimales. Ceci mène à $\pi_1(Q,I_2) = 1$.

Supposons maintenant que $\text{car } k = 3$, et considérons le morphisme $\nu_3 : kQ \rightarrow kQ/I_1$ défini par $\alpha_i \mapsto \alpha_i - \beta_i$ et $\beta_i \mapsto \beta_i$ pour $i \in \{1,2,3\}$. Un calcul direct montre que $\alpha_3\alpha_2\alpha_1$, $\alpha_3\beta_2 - \beta_3\alpha_2$ et $\alpha_2\beta_1 - \beta_2\alpha_1$ sont des éléments de $I_3 = \text{Ker } \nu_3$ et que ce sont en fait des relations minimales. Ceci mène à $\pi_1(Q,I_3) \simeq \mathbb{Z}$.

Définition 1.4.3 Une algèbre triangulaire A est dite **simplement connexe** si le groupe fondamental $\pi_1(Q,I)$ est trivial pour chaque présentation (Q,I) de A .

Exemples 1.4.4

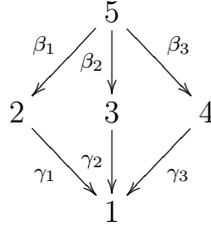
- a) Une algèbre monomiale $A = kQ/I$ est simplement connexe si et seulement si le graphe sous-jacent à Q est un arbre.
- b) Les algèbres des exemples 1.4.2 b) et c) ne sont pas simplement connexes. En effet, il existe des présentations de ces dernières qui donnent lieu à des groupes fondamentaux non triviaux.

Dans [17], la question des changements de groupes fondamentaux possibles survenant suite à des changements de présentation est traitée. Dans les exemples précédents, l'existence de chemins non nuls parallèles à des flèches permet de faire des changements de présentations qui mènent à des changements de groupes fondamentaux (voir exemples 1.4.2 b) et c)). Ceci nous mène à la définition suivante.

Définition 1.4.5 Une algèbre $A = kQ/I$ est dite **contrainte** si, pour toute flèche $\alpha : x \rightarrow y$ de Q on a $\dim_k e_x A e_y = 1$.

En particulier, toute algèbre schurienne est toujours contrainte mais la réciproque n'est pas vraie, comme l'exemple suivant le montre.

Exemple 1.4.6 Soit Q le carquois



lié par l'idéal $I = \langle \sum_{i=1}^3 \beta_i \gamma_i \rangle$. Il est clair que l'algèbre $A = kQ/I$ est contrainte. Cependant, nous avons $\dim_k e_5 A e_1 = 2$.

Théorème 1.4.7 (Bardzell - Marcos [9]) Soient (Q, I_1) et (Q, I_2) deux présentations d'une algèbre contrainte A . Alors, il existe un isomorphisme $\pi_1(Q, I_1) \simeq \pi_1(Q, I_2)$. □

Ainsi, dans le cas d'une algèbre contrainte A , par exemple schurienne, la notation $\pi_1(A)$ n'est pas ambiguë, et on peut parler du **groupe fondamental de l'algèbre A** .

Une notion étroitement liée à la relation d'homotopie est celle d'homotopie naturelle. On comparera cette définition avec [5].

Définition 1.4.8 Soit (Q, I) un carquois lié. Deux chemins parallèles p et q sont dits **naturellement homotopes** si $p = q$ ou il existe une suite de chemins parallèles $p = p_0, p_1, \dots, p_s = q$, et, pour $i \in \{1, \dots, s\}$ des chemins u_i, v_{i1}, v_{i2}, w_i tels que $p_i = u_i v_{i1} w_i$, $p_{i+1} = u_i v_{i2} w_i$, avec v_{i1} et v_{i2} apparaissant dans une même relation minimale.

Dans la situation précédente on écrira $p \wedge q$, et \hat{p} désignera la classe d'homotopie naturelle de p . Remarquons aussi que pour une flèche α de Q , nous avons, en vertu de l'admissibilité de I , $\hat{\alpha} = \{\alpha\}$. Par ailleurs il est clair que $w \wedge w'$ entraîne $w \sim w'$, mais l'implication contraire n'est pas valide.

Exemple 1.4.9 Soit Q le carquois

$$3 \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\gamma} \end{array} 2 \xrightarrow{\alpha} 1$$

lié par l'idéal $I = \langle \beta\alpha - \gamma\alpha \rangle$. Les flèches β et γ sont homotopes sans être naturellement homotopes.

Lemme 1.4.10 Soit (Q, I) un carquois lié. La relation d'homotopie naturelle est la plus petite relation d'équivalence \mathcal{R} sur l'ensemble des chemins de Q vérifiant

b) Pour toute relation minimale $\sum_{i=1}^r \lambda_i w_i$ on a $w_i \mathcal{R} w_j$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, r\}$,

c) Si u, v, w et w' sont des chemins avec $w \mathcal{R} w'$, alors $uwv \mathcal{R} uw'v$, lorsque ces compositions ont un sens.

Démonstration : Il est clair que la relation \wedge vérifie les conditions b) et c) ci dessus. Par ailleurs, supposons que p et q sont deux chemins parallèles tels que $p \wedge q$. Ainsi, par définition, il existe une suite de chemins parallèles $p = p_0, p_1, \dots, p_s = q$, et, pour $i \in \{1, \dots, s\}$ des chemins u_i, v_{i1}, v_{i2}, w_i tels que $p_i = u_i v_{i1} w_i, p_{i+1} = u_i v_{i2} w_i$, avec v_{i1} et v_{i2} apparaissant dans une même relation minimale. Il suit de la condition b) que $v_{i1} \mathcal{R} v_{i2}$, pour tout i tel que $1 \leq i \leq s$. Il suit alors de la condition c) que $u_i v_{i1} w_i \mathcal{R} u_i v_{i2} w_i$, pour tout i tel que $1 \leq i \leq s$, d'où $p \mathcal{R} q$.

□

Chapitre 2

L'ESPACE CLASSIFIANT D'UN CARQUOIS LIÉ $\mathcal{B}(Q, I)$

L'utilisation de méthodes inspirées de la topologie algébrique a joué un rôle essentiel dans le développement de la théorie des représentations des algèbres. Encore une fois, ce sont les travaux de P. Gabriel et son école qui sont à l'origine de ceci (voir, par exemple [13, 14, 52, 29]). Plus précisément, dans [12, 14], des méthodes d'homologie simpliciale ont été introduites dans l'étude des algèbres schuriennes. Dans le cas d'une algèbre presque triangulaire A , la construction en question revient à lui associer un complexe simplicial $|A|$ et d'étudier les groupes d'homologie de ce dernier. Cette approche a aussi été adaptée à un contexte plus général que celui des algèbres schuriennes. Nous commençons ce chapitre par un survol de ces méthodes. Une brève discussion concernant les espaces classifiants des petites catégories est faite dans la section 2. De ces deux sections s'inspire la construction d'un espace topologique associé à un carquois lié. Nous l'appelons l'espace classifiant du carquois lié considéré. La section 3 est consacrée à sa définition et à en donner plusieurs exemples. Finalement, nous faisons quelques remarques élémentaires concernant cette construction.

2.1 Méthodes Simpliciales et Algèbres

Nous commençons par un rappel de la définition des groupes d'homologie simpliciale d'une algèbre schurienne selon [14]. Soient $A = kQ/I$ une telle algèbre, et, pour $n \geq 1$, $S_n(A)$ l'ensemble des suites (x_0, x_1, \dots, x_n) de $n+1$ points distincts de Q tels que pour tout

$j \in \{1, \dots, n\}$, il existe un élément $f_j \in A(x_{j-1}, x_j)$ de sorte que le produit $f_1 f_2 \cdots f_j \neq 0$. En particulier, $S_1(A)$ est identifié à l'ensemble des couples (x, y) de sommets distincts de Q tels que $A(x, y) \neq 0$. On conviendra que $S_0(A) = Q_0$. Soit $C_n(A)$ le groupe abélien libre ayant pour base $S_n(A)$, et $d_n : C_n(A) \rightarrow C_{n-1}(A)$ l'homomorphisme défini par

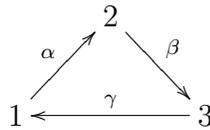
$$d_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Ceci fait de $(C_\bullet(A), d_\bullet)$ un complexe différentiel de groupes abéliens. Les groupes d'homologie simpliciale de A sont alors définis comme étant les groupes d'homologie du complexe $(C_\bullet(A), d_\bullet)$, et sont notés $SH_i(A)$. Ces groupes sont, comme on peut bien l'imaginer, reliés étroitement à la connexité simple de A (voir [12]), mais ils donnent aussi de l'information sur des questions telles que l'existence de bases multiplicatives (voir [14, 44, 42]), et ils sont reliés aux groupes de cohomologie de Hochschild de A (voir [42, 34, 20]). Nous reviendrons sur les détails de cette construction et les liens mentionnés ci-haut aux chapitres 4 et 5.

Dans le cas où A est une algèbre presque triangulaire, ces groupes ont une interprétation géométrique claire. En effet, le complexe $(C_\bullet(A), d_\bullet)$ est le complexe des chaînes du complexe simplicial $|A|$ défini de la façon suivante: les sommets de $|A|$ sont les points de Q , et les r -simplexes de $|A|$ sont les ensembles $\{x_0, x_1, \dots, x_r\}$ de $r + 1$ points différents de Q tels que $A(x_0, x_1)A(x_1, x_2) \cdots A(x_{r-1}, x_r) \neq 0$.

Exemples 2.1.1

- a) Soient (E, \leq) un ensemble ordonné, et $A = k(E)$ son algèbre d'incidence. Le complexe simplicial $|A|$ est dans ce cas le complexe simplicial des chaînes non vides de E , qu'on note habituellement $\Delta(E)$.
- b) Considérons le carquois Q



lié par $I = \langle \gamma\alpha \rangle$. L'algèbre $A = kQ/I$ est schurienne, mais n'est pas presque triangulaire. Le complexe $|A|$ est le suivant: il y a un 2-simplexe, $\{1, 2, 3\}$ qui correspond à la composition de α et β . Par ailleurs, il y a trois 1-simplexes: $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, et $\{1, 3\}$ qui correspondent à α , β , et $\alpha\beta$, respectivement. Notons enfin que le simplexe correspondant à γ est $\{3, 1\} = \{1, 3\}$. Ainsi, le groupe des 1-chaînes de A est abélien libre de rang 3. Le complexe $|A|$ étant contractile, nous avons $\pi_1(|A|) = 1$. On remarque que $\pi_1(Q, I) = \mathbb{Z}$. Par ailleurs, $S_1(A)$ est donné par $\{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 1)\}$, de sorte que $S_1(A)$ est abélien libre de rang 4. Un calcul immédiat donne $SH_1(A) \simeq \mathbb{Z}$.

L'exemple précédent montre que le complexe $(C_\bullet(A), d_\bullet)$ n'est généralement pas le complexe de chaînes du complexe simplicial $|A|$. Bien que ce dernier présente l'avantage d'être un espace topologique concret, il entraîne une perte d'information lorsque A n'est pas une algèbre presque triangulaire. D'autre part, aucun espace topologique n'est, *a priori* associé au complexe $(C_\bullet(A), d_\bullet)$.

Une autre remarque importante est que les constructions présentées ci-haut, ont été faites dans le contexte des algèbres schuriennes. Si on les transpose textuellement au cas général, on se rend vite compte des limitations.

Exemple 2.1.2 Considérons le carquois Q suivant:

$$2 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} 1$$

et $A = kQ$, l'algèbre dite de Kronecker. On remarquera tout d'abord que $\pi_1(Q, I) = \mathbb{Z}$. Par ailleurs, le complexe simplicial est réduit à un 2-simplexe $\{1, 2\}$, qui est un espace topologique contractile, de sorte que $\pi_1(|A|) = 1$. Par ailleurs, une base de $C_1(A)$ est $\{(1, 2)\}$, et il est facile de voir que le complexe $(C_\bullet(A), d_\bullet)$ est acyclique. Ceci vient du fait qu'on ne tient pas compte de l'existence deux morphismes distincts de 2 vers 1.

On vient donc de voir que les constructions du complexe simplicial $|A|$ et du complexe différentiel $(C_\bullet(A), d_\bullet)$, telles que présentées ici, perdent de leur utilité lorsqu'on sort du contexte des algèbres schuriennes presque triangulaires, ou schuriennes, respectivement. Avant de continuer, notons que l'homologie simpliciale d'une algèbre non nécessairement schurienne a été définie dans [44, 42], sans toutefois passer par le biais d'un espace topologique. Comme il a été mentionné plus haut, nous y reviendrons dans le chapitre 4.

Nous cherchons à bâtir un espace topologique qui permettrait d'étendre les constructions présentées à un contexte plus général. Il s'agira d'un CW-complexe, une classe d'espaces topologiques plus riche que celle des complexes simpliciaux. On réfère le lecteur à [55], par exemple, pour plus de détails au sujet des CW-complexes. Avant de continuer, nous faisons une brève exposition à propos des espaces classifiants de petites catégories.

2.2 Espaces Classifiants de Petites Catégories

La construction du complexe des chaînes $\Delta(E)$ d'un ensemble ordonné (E, \leq) est un cas particulier d'une construction beaucoup plus générale issue de la K -théorie : celle de l'espace classifiant \mathcal{BC} d'une petite catégorie \mathcal{C} (voir [57, 48, 53], par exemple). Étant

donnée une petite catégorie \mathcal{C} , l'espace \mathcal{BC} est le CW-complexe ayant comme 0-cellules les objets de \mathcal{C} . Par ailleurs, pour un entier $n \geq 1$, il y a une n -cellule pour chaque diagramme

$$X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} X_n$$

dans \mathcal{C} dans lequel aucun des morphismes f_i n'est un morphisme identité. La n -cellule correspondante est *attachée* de la façon évidente aux cellules de dimension inférieure obtenues en biffant un des objets X_i du diagramme ci-haut, et, pour chaque i tel que $1 \leq i < n$, en remplaçant les morphismes f_i et f_{i+1} par la composition $f_{i+1} \circ f_i$, lorsque cette dernière n'est pas un morphisme identité.

Exemple 2.2.1 Soit (E, \leq) un ensemble ordonné. Il est possible de considérer E comme une petite catégorie dont la classe d'objets est l'ensemble E lui-même, et, pour deux objets x et y de E , il existe un unique morphisme $\rho_y^x : x \rightarrow y$ si et seulement si $y \leq x$ dans E . La composition de deux morphismes $\rho_y^x : x \rightarrow y$ et $\rho_z^y : y \rightarrow z$ est tout naturellement ρ_z^x . Il s'agit là de la catégorie d'incidence de E . Il est alors facile de voir que l'espace classifiant $\mathcal{B}(E)$ est précisément le complexe des chaînes $\Delta(E)$ de E .

2.3 L'Espace Classifiant d'un Carquois Lié

Comme il été mentionné précédemment, on voudrait associer un espace topologique à une algèbre de sorte que l'homologie, la cohomologie et le groupe fondamental de celle-ci puissent être interprétés en termes de l'homologie, la cohomologie et le groupe fondamental de celui-là. Or, comme nous l'avons vu au Chapitre 1, la relation d'homotopie qui nous intéresse n'est pas définie par l'algèbre A , mais par un carquois lié (Q, I) tel que $A \simeq kQ/I$. Pire encore, cette relation dépend du choix de l'idéal I . Ces considérations nous mènent à associer l'espace voulu à un carquois lié, et non pas à une algèbre. L'espace en question a été introduit dans [16].

Avant de donner en détail la construction de l'espace en question, quelques rappels et précisions s'imposent. Il s'agit de matériel tout à fait standard en topologie algébrique que nous incluons ici par souci de complétude. Pour plus de détails, on pourra consulter [55], chapitre 8.

Soient X et Y deux espaces topologiques. Le co-produit $X \coprod Y$ dans la catégorie des espaces topologiques est la réunion disjointe $X \cup Y$ dans lequel un ensemble U est ouvert si et seulement si $U \cap X$ et $U \cap Y$ sont ouverts dans X et Y respectivement. Dans cette situation, soit $A \subset X$ un ensemble fermé de X , et $f : A \rightarrow Y$ une application continue. Soit \sim_f la relation d'équivalence sur $X \coprod Y$ engendrée par

2.3. L'ESPACE CLASSIFIANT D'UN CARQUOIS LIÉ

$\{(a, f(a)) \in (X \amalg Y) \times (X \amalg Y) \mid a \in A\}$. Le quotient $(X \amalg Y) / \sim$, qu'on note $X \amalg_f Y$ est **l'espace obtenu en attachant X à Y le long de f** .

Par ailleurs, pour $n \geq 0$, soit $\Delta^n = \{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i \geq 0\}$ le n -simplexe standard. La $j^{\text{ième}}$ face de Δ^n est $\partial_j \Delta^n = \{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \Delta^n \mid t_j = 0\}$. Notamment, la frontière de Δ^n est $\partial \Delta^n = \cup_j \partial_j \Delta^n$. Une n -**cellule ouverte** est une copie homéomorphe de $\Delta^n \setminus \partial \Delta^n$.

L'espace qui nous intéresse est un CW-complexe qui sera construit en attachant des cellules de dimension n à un complexe de dimension $n - 1$ préalablement construit. Soit donc (Q, I) un carquois lié. Commençons par spécifier les ensembles de cellules correspondant à chaque dimension. Posons $\mathcal{C}_0 = Q_0$, $\mathcal{C}_1 = \{\widehat{\sigma} \mid \sigma : x \rightsquigarrow y \text{ est un chemin non trivial dans } Q, \sigma \notin I\}$, et, pour $n \geq 1$, $\mathcal{C}_n = \{(\widehat{\sigma}_1, \widehat{\sigma}_2, \dots, \widehat{\sigma}_n) \mid \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n \text{ est un chemin dans } Q \text{ tel que } \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n \notin I, \sigma_i \text{ non trivial pour } 1 \leq i \leq n\}$. Nous écrirons σ pour signaler un élément de \mathcal{C}_n , la dimension n se déduisant du contexte. Remarquons que l'idéal I étant admissible, il existe un entier k tel que $\mathcal{C}_n = \emptyset$ pour $n \geq k$. Par ailleurs étant donné un élément $\sigma = \widehat{\sigma}$ de \mathcal{C}_1 , avec $\sigma : x \rightsquigarrow y$, posons $\partial_0^1(\sigma) = y$, et $\partial_1^1(\sigma) = x$. Ceci définit des applications $\partial_i^1 : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_0$, pour $i \in \{0, 1\}$. Plus généralement, pour $n \geq 1$, et pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ les applications $\partial_i^n : \mathcal{C}_n \rightarrow \mathcal{C}_{n-1}$ définies sur un élément $\sigma = (\widehat{\sigma}_1, \widehat{\sigma}_2, \dots, \widehat{\sigma}_n) \in \mathcal{C}_n$ par :

$$\begin{aligned} \partial_0^n(\sigma) &= (\widehat{\sigma}_2, \widehat{\sigma}_3, \dots, \widehat{\sigma}_n), \\ \partial_1^n(\sigma) &= (\widehat{\sigma}_1, \widehat{\sigma}_3, \dots, \widehat{\sigma}_n), \\ &\vdots \\ \partial_i^n(\sigma) &= (\widehat{\sigma}_1, \dots, \widehat{\sigma}_i, \widehat{\sigma}_{i+1}, \dots, \widehat{\sigma}_n), \\ &\vdots \\ \partial_n^n(\sigma) &= (\widehat{\sigma}_1, \dots, \widehat{\sigma}_{n-1}). \end{aligned}$$

Pour $n \geq 0$, et $\sigma \in \mathcal{C}_n$, on se fixe une copie Δ_σ^n de Δ^n , telle que $\Delta_\sigma^n \cap \Delta_\omega^m = \emptyset$ lorsque $(n, \sigma) \neq (m, \omega)$.

Nous sommes maintenant en mesure de présenter la construction annoncée.

- Dimension 0. Posons $\mathcal{B}^0 = \cup_{x \in Q_0} \Delta_x^0$, muni de la topologie discrète.
- Dimension 1. Nous voulons attacher une 1-cellule Δ_σ^1 pour chaque élément σ de \mathcal{C}_1 . Étant donné un tel élément avec $\sigma : x \rightsquigarrow y$, nous avons $\partial_0(\sigma) = y$ et $\partial_1(\sigma) = x$. Définissons $f_\sigma : \partial \Delta_\sigma^1 \rightarrow \mathcal{B}^0$ par $f_\sigma(\partial_i \Delta_\sigma^1) = \Delta_{\partial_i \sigma}^0$, considérons le co-produit

$$f^1 = \coprod_{\sigma \in \mathcal{C}_1} f_\sigma : \coprod_{\sigma \in \mathcal{C}_1} \partial \Delta_\sigma^1 \longrightarrow \mathcal{B}^0 \text{ et désignons par } p^1 \text{ la projection canonique}$$

$$p^1 : \left(\coprod_{\sigma \in \mathcal{C}_1} \Delta_\sigma^1 \right) \amalg \mathcal{B}^0 \longrightarrow \left(\coprod_{\sigma \in \mathcal{C}_1} \Delta_\sigma^1 \right) \amalg_{f^1} \mathcal{B}^0.$$

Finalement, définissons

$$\mathcal{B}^1 = \left(\coprod_{\sigma \in \mathcal{C}_1} \Delta_\sigma^1 \right) \coprod_{f^1} \mathcal{B}^0.$$

- Dimension n . Afin d'alléger les notations nous écrirons $\partial_j(\sigma)$ à la place de $\partial_j^n(\sigma)$. Supposons que \mathcal{B}^{n-1} a été construit. Étant donnée $\sigma \in \mathcal{C}_n$, nous avons que, pour $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, les $\partial_i(\sigma)$ sont des éléments de \mathcal{C}_{n-1} . Les $(n-1)$ -cellules correspondantes sont $\Delta_{\partial_i \sigma}^{n-1}$. Nous avons les inclusions $q_{\partial_i \sigma} : \Delta_{\partial_i \sigma}^{n-1} \rightarrow \coprod_{\tau \in \mathcal{C}_{n-1}} \Delta_\tau^{n-1}$, et $\mathcal{B}^{n-1} = \left(\coprod_{\sigma \in \mathcal{C}_{n-1}} \Delta_\sigma^{n-1} \right) \coprod_{f^{n-1}} \mathcal{B}^{n-2}$, avec p^{n-1} la projection canonique. Rappelons que le bord de Δ_σ^n est $\partial \Delta_\sigma^n = \cup_i \partial_i \Delta_\sigma^n$. Définissons $f_\sigma : \partial \Delta_\sigma^n \rightarrow \mathcal{B}^{n-1}$ de la façon suivante : $f_\sigma(\partial_j \Delta_\sigma^n) = p^{n-1} q_{\partial_j \sigma}(\Delta_{\partial_j \sigma}^{n-1})$. Cette fonction est continue sur chaque $\partial_i \Delta_\sigma^n$, de sorte qu'elle est continue sur $\partial \Delta_\sigma^n$ qui est un fermé de Δ_σ^n . Considérons le co-produit $f^n = \coprod_{\sigma \in \mathcal{C}_n} f_\sigma : \coprod_{\sigma \in \mathcal{C}_n} \partial \Delta_\sigma^n \rightarrow \mathcal{B}^{n-1}$ et désignons par p^n la projection canonique

$$p^n : \left(\coprod_{\sigma \in \mathcal{C}_n} \Delta_\sigma^n \right) \coprod_{f^n} \mathcal{B}^{n-1} \longrightarrow \left(\coprod_{\sigma \in \mathcal{C}_1} \Delta_\sigma^n \right) \coprod_{f^n} \mathcal{B}^{n-1}.$$

Finalement, définissons

$$\mathcal{B}^n = \left(\coprod_{\sigma \in \mathcal{C}_n} \Delta_\sigma^n \right) \coprod_{f^n} \mathcal{B}^{n-1}.$$

Étant donnée $\sigma \in \mathcal{C}_n$, nous dénoterons, par abus de notation, σ l'image de Δ_σ^n par la composition suivante qui est appelée une **application caractéristique pour σ** :

$$\Delta_\sigma^n \xrightarrow{q_\sigma} \coprod_{\sigma \in \mathcal{C}_n} \Delta_\sigma^n \xrightarrow{\quad} \left(\coprod_{\sigma \in \mathcal{C}_n} \Delta_\sigma^n \right) \coprod_{f^n} \mathcal{B}^{n-1} \xrightarrow{p^n} \mathcal{B}^n$$

Ainsi, σ désignera à la fois le n -tuple $(\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_n)$ et un sous espace de \mathcal{B}^n .

Définition 2.3.1 *Soit (Q, I) un carquois lié. Avec les notations qui précèdent, soit $n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \mathcal{C}_{k+1} = \emptyset\}$. L'espace classifiant de (Q, I) , qu'on notera $\mathcal{B}(Q, I)$, est le CW-complexe \mathcal{B}^n obtenu par la construction précédente.*

Une remarque immédiate est que lorsque l'algèbre $A = kQ/I$ est presque triangulaire, alors aucun chemin n'appartenant pas à l'idéal I passe deux fois par le même sommet. Une conséquence de ceci est que, dans cette situation, la frontière de toute n -cellule est homéomorphe à la sphère $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. Ainsi, le complexe $\mathcal{B}(Q, I)$ est un CW-complexe régulier.

2.3. L'ESPACE CLASSIFIANT D'UN CARQUOIS LIÉ

Par ailleurs, étant donné que pour une flèche α nous avons $\widehat{\alpha} = \{\alpha\}$, on peut identifier de façon naturelle le graphe sous-jacent à Q à un sous-complexe de $\mathcal{B}(Q, I)$.

Exemples 2.3.2

a) Soit Q le carquois

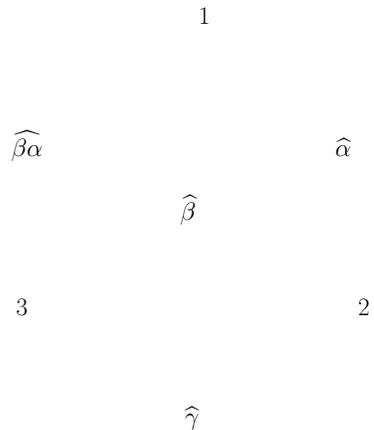
$$3 \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xleftarrow{\gamma} \end{array} 2 \xrightarrow{\alpha} 1$$

lié par l'idéal $I = \langle (\beta - \gamma)\alpha \rangle$. Les cellules de $\mathcal{B}(Q, I)$ sont les suivantes:

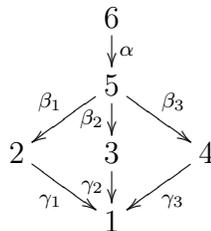
Les 1-cellules sont données par $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}$, et $\widehat{\gamma\alpha} = \widehat{\beta\alpha}$;

Les 2-cellules sont données par les paires $(\widehat{\gamma}, \widehat{\alpha})$ et $(\widehat{\beta}, \widehat{\alpha})$.

Le bord de la cellule $(\widehat{\gamma}, \widehat{\alpha})$ est la réunion de trois cellules de dimension 1 : $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\gamma\alpha}$ et $\widehat{\gamma}$, tandis que le bord de la deuxième 2-cellule est la réunion des cellules $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta\alpha}$ et $\widehat{\beta}$. Étant donné que $\widehat{\beta\alpha} = \widehat{\gamma\alpha}$, nous avons que les deux 2-cellules ont dans leur bord deux 1-cellules en commun. Ainsi, $\mathcal{B}(Q, I)$ est homéomorphe au cône:



b) Considérons le carquois



2.3. L'ESPACE CLASSIFIANT D'UN CARQUOIS LIÉ

lié par l'idéal I engendré par $\alpha\beta_1$ et $\sum_{i=1}^3 \beta_i\gamma_i$. Les cellules de $\mathcal{B}(Q,I)$ sont les suivantes:

Les 1-cellules sont données par $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}_i, \widehat{\gamma}_i, \widehat{\beta_1\gamma_1} = \widehat{\beta_2\gamma_2} = \widehat{\beta_3\gamma_3}, \widehat{\alpha\beta_2}, \widehat{\alpha\beta_3}$ et $\widehat{\alpha\beta_2\gamma_2} = \widehat{\alpha\beta_3\gamma_3}$;

Les 2-cellules sont données par $(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}_2), (\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}_3), (\widehat{\alpha}, \widehat{\beta_2\gamma_2}), (= (\widehat{\alpha}, \widehat{\beta_3\gamma_3})), (\widehat{\alpha\beta_2}, \widehat{\gamma_2}), (\widehat{\alpha\beta_3}, \widehat{\gamma_3}),$ et $(\widehat{\beta}_i, \widehat{\gamma}_i),$ pour $i \in \{1,2,3\}$;

Les 3-cellules sont données par $(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}_2, \widehat{\gamma_2})$ et $(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}_3, \widehat{\gamma_3}).$

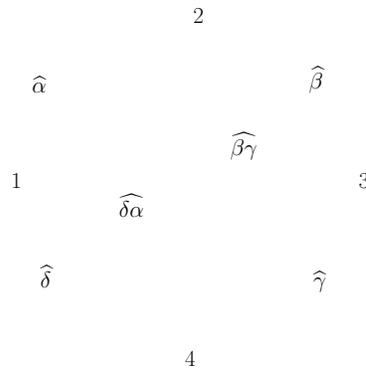
Comme dans l'exemple précédent, on montre que les deux 3-cellules ont dans leur bord une 2-cellule en commun. L'espace $\mathcal{B}(Q,I)$ est homéomorphe à l'espace schématisé dans la figure suivante:

- c) Soient Q un carquois et I l'idéal engendré par les chemins de longueur 2. Toute flèche $\alpha : x \rightarrow y$ de Q donne lieu à une 1-cellule joignant x à y . Par ailleurs, comme tout chemin de longueur 2 ou plus est nul, il n'y a pas d'autre 1-cellule. Pour la même raison il n'y a pas de cellules de dimension supérieure. Ainsi, dans cette situation, le complexe $\mathcal{B}(Q,I)$ n'est autre que le graphe sous-jacent à Q .

- d) Soit Q le carquois

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\alpha} & 2 \\ \delta \uparrow & & \downarrow \beta \\ 4 & \xleftarrow{\gamma} & 3 \end{array}$$

lié par l'idéal $I = \langle \alpha\beta, \gamma\delta \rangle$. On remarque que l'algèbre $A = kQ/I$ n'est pas presque triangulaire. L'espace classifiant de (Q,I) est schématisé dans la figure suivante :



2.3. L'ESPACE CLASSIFIANT D'UN CARQUOIS LIÉ

Comme il a été mentionné précédemment, le but principal de cette construction est de généraliser la construction du complexe simplicial $|A|$ associé à une algèbre schurienne triangulaire. C'est effectivement le cas, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 2.3.3 *Soit $A = kQ/I$ une algèbre schurienne presque triangulaire. L'espace $\mathcal{B}(Q,I)$ est alors le complexe simplicial $|A|$.*

Démonstration : Soit $A = kQ/I$ une algèbre schurienne presque triangulaire, et x, y deux sommets distincts de Q . Dans $\mathcal{B}(Q,I)$ il existe une 1-cellule joignant x à y si et seulement s'il y a un chemin non nul w_1 de x vers y , disons. En particulier, puisque A est presque triangulaire, ceci entraîne qu'il n'existe pas de chemin non nul de y vers x . Étant donné que A est schurienne, s'il existe un autre tel chemin w_2 , alors w_1 et w_2 sont linéairement dépendants. C'est-à-dire qu'il existe des scalaires non nuls λ_1, λ_2 tels que $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in I(x,y)$. Les chemins w_1 et w_2 étant non nuls, on conclut qu'il s'agit d'une relation minimale, de sorte que $\widehat{w}_1 = \widehat{w}_2$. Ainsi, la 1-cellule induite par w_1 est la même que la cellule induite par w_2 . Ceci montre que dans le cas des algèbres schurienes presque triangulaires, on peut identifier une 1-cellule \widehat{w}_1 au simplexe $\{x,y\}$. De la même façon, étant donnée une n -cellule $(\widehat{\sigma}_1, \widehat{\sigma}_2, \dots, \widehat{\sigma}_n)$, avec $\sigma_i \in A(x_{i-1}, x_i)$, on peut identifier cette dernière à $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

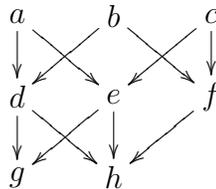
□

Un cas particulièrement intéressant est celui des algèbres d'incidence. En vertu du résultat précédent et de ce que nous avons vu à l'exemple 2.1.1 a), si (E, \leq) est un ensemble ordonné et $A = k(E)$ son algèbre d'incidence, alors le complexe simplicial $|A|$ est précisément l'espace classifiant $\mathcal{B}(E) = \mathcal{B}(Q_E, I)$, où Q_E et I sont comme dans l'exemple 1.2.1 c).

Dans ce contexte, il est souvent possible d'enlever certains éléments de l'ordonné E sans changer le type d'homotopie de l'espace $\mathcal{B}(E)$.

Définition 2.3.4 *Soit (E, \leq) un ensemble ordonné. Un élément $x \in E$ est dit être un élément **irréductible** s'il couvre (ou est couvert par) exactement un élément de E .*

Exemple 2.3.5 Soit (E, \leq) l'ensemble ordonné dont le carquois Q_E est



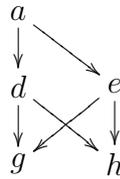
Seul l'élément f est irréductible dans (E, \leq) .

Le résultat suivant (dont on pourra trouver une démonstration dans [23] ou [40], par exemple) permet de ramener l'étude de l'espace classifiant d'un ensemble ordonné à celui d'un autre ensemble ordonné ayant moins d'éléments.

Proposition 2.3.6 *Soit x un élément irréductible dans un ensemble ordonné (E, \leq) . Alors, l'espace classifiant $\mathcal{B}(E \setminus \{x\})$ est un retract de déformation de $\mathcal{B}(E)$.*

□

Exemple 2.3.7 Considérons l'ensemble ordonné de l'exemple précédent. En vertu de la proposition ci-haut, il est possible d'enlever l'élément f . Nous obtenons ainsi un nouvel ensemble ordonné E_1 dans lequel les éléments b et c couvrent seulement les éléments d et e respectivement. Ainsi, il est possible de les enlever. Le carquois Q_{E_2} associé à E_2 est alors :

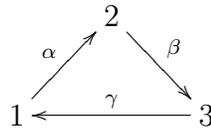


Il est alors possible d'enlever l'élément d pour obtenir un ordonné dont le carquois est un arbre. En continuant le processus, nous obtenons un ordonné réduit à un point. En vertu de la proposition précédente, l'espace $\mathcal{B}(E)$ a le même type d'homotopie qu'un point, c'est à dire qu'il s'agit d'un espace topologique contractile.

Par ailleurs, la construction de $\mathcal{B}(Q, I)$ corrige la perte d'information entraînée par celle du complexe simplicial $|A|$ lorsque A n'est pas une algèbre schurienne presque triangulaire.

Exemples 2.3.8

a) Considérons le carquois Q de l'exemple 2.1.1 b),



lié par $I = \langle \gamma\alpha, \alpha\beta\gamma \rangle$. L'espace $\mathcal{B}(Q, I)$ est alors homéomorphe à l'espace de la figure ci-dessous :

Il est facile de voir que $\pi_1(\mathcal{B}(Q, I)) \simeq \mathbb{Z} \simeq \pi_1(Q, I)$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \widehat{\alpha\beta} & & & \\
 & & & \widehat{\alpha} & & & \\
 & & & 1 & & 2 & \widehat{\beta} & & 3 \\
 & & & & & & \widehat{\beta\gamma} & & \\
 & & & & & & \widehat{\gamma} & &
 \end{array}$$

b) Soit Q le carquois

$$2 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} 1$$

et $I = 0$. Alors, l'espace $\mathcal{B}(Q, I)$ est le graphe sous-jacent à Q , et nous avons clairement $\pi_1(\mathcal{B}(Q, I)) \simeq \mathbb{Z} \simeq \pi_1(Q, I)$.

Nous verrons, dans le chapitre suivant, que les isomorphismes des groupes fondamentaux des exemples précédents découlent en fait d'un théorème général. Cependant, avant de poursuivre, faisons quelques remarques.

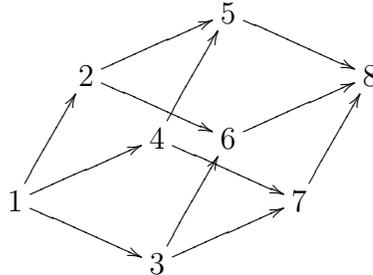
2.4 Quelques Remarques

La première remarque qui s'impose est que malgré la ressemblance de la construction de $\mathcal{B}(Q, I)$ avec la construction de l'espace classifiant d'une petite catégorie, $\mathcal{B}(Q, I)$ n'est généralement pas, à proprement parler, l'espace classifiant d'une petite catégorie au sens de [57, 48, 53]. Il s'agit donc là d'un abus de langage. En effet, il serait naturel de penser que $\mathcal{B}(Q, I)$ est l'espace classifiant de la catégorie quotient $\mathcal{P}(Q, I) = \mathcal{P}(Q)/\wedge$. Cependant, ce n'est pas le cas. En général, $\mathcal{B}(Q, I)$ est un sous-complexe de $\mathcal{B}(\mathcal{P}(Q, I))$. Les n -cellules de $\mathcal{B}(\mathcal{P}(Q, I))$ sont en bijection avec les n -tuplets $(\widehat{\sigma}_1, \widehat{\sigma}_2, \dots, \widehat{\sigma}_n)$ de morphismes composables de $\mathcal{P}(Q, I)$, peu importe si cette composition est nulle ou pas. En fait, parler de "composition nulle" dans $\mathcal{P}(Q, I)$ n'a aucun sens, car cette catégorie n'est pas linéaire. On serait alors tenté de considérer la k -linéarisation $k\mathcal{P}(Q, I)$ de $\mathcal{P}(Q, I)$. Cependant, ceci donnerait lieu à un complexe comportant trop de cellules. En effet, pour deux objets x, y de $k\mathcal{P}(Q, I)$ il faudrait une 1-cellule joignant x à y pour chaque morphisme de x à y dans $k\mathcal{P}(Q, I)$, et non pour chaque vecteur de base de $k\mathcal{P}(Q, I)(x, y)$. Ainsi, la construction de $\mathcal{B}(Q, I)$ tient en ligne de compte plus d'information que la seule relation d'homotopie naturelle : les relations monomiales sont ignorées lors de la définition de cette dernière, mais ce n'est pas le cas lors de la construction de $\mathcal{B}(Q, I)$. Les

exemples suivants illustrent ce qui précède.

Exemples 2.4.1

a) Soit Q le carquois



lié par l'idéal I engendré par toutes les relations de commutativité et les chemins de longueur 3. L'espace $\mathcal{B}(Q, I)$ est homéomorphe à la sphère $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$. Les relations de commutativité fournissent l'information nécessaire pour le rattachement des cellules. D'autre part, comme les chemins de longueur 3 se trouvent dans l'idéal, il n'y a pas de 3-cellules qui viendraient "remplir le trou".

Par ailleurs, l'espace $\mathcal{B}(\mathcal{P}(Q, I))$ est homéomorphe à la sphère $B^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq 1\}$. Ainsi, $\mathcal{B}(Q, I)$ et $\mathcal{B}(\mathcal{P}(Q, I))$ n'ont pas le même type d'homotopie.

b) Soient (Q, I) le carquois lié de l'exemple précédent, et I' l'idéal engendré par les relations de commutativité. Ainsi $I = I' + F^3$. En particulier, les relations d'homotopie induites par I et I' sont les mêmes. Cependant, l'espace $\mathcal{B}(Q, I)$ est homéomorphe à S^2 , tandis que $\mathcal{B}(Q, I')$ est homéomorphe à B^3 . Ces deux espaces n'ont donc pas le même type d'homotopie.

Par ailleurs, si dans l'idéal I il n'y a pas de relations monomiales, les n -cellules de $\mathcal{B}(Q, I)$ sont précisément les n -uplets $(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \dots, \hat{\sigma}_n)$ de morphismes dont la composition a du sens. Dans ce cas la condition de non nullité dans la définition de l'espace $\mathcal{B}(Q, I)$ est trivialement vérifiée, de sorte que $\mathcal{B}(Q, I)$ et $\mathcal{B}(\mathcal{P}(Q, I))$ coïncident. C'est notamment le cas des espaces classifiants de carquois liés correspondant à des algèbres d'incidence. Rapellons en plus que dans ce cas les relations \wedge et \sim coïncident.

Une autre question naturelle est celle de la fonctorialité. Nous savons que la construction d'espaces classifiants mène à un foncteur \mathcal{B} de la catégorie des petites catégories vers la catégorie des espaces topologiques, habituellement notée $\mathcal{T}op$. Il est donc légitime de se demander si la construction de l'espace classifiant d'un carquois lié donne lieu à un foncteur de la catégorie des carquois liés vers $\mathcal{T}op$. Avant de répondre à cette question, il est nécessaire d'apporter quelques précisions au sujet de la catégorie des carquois liés. Notamment, nous avons besoin de la notion de morphisme de carquois liés.

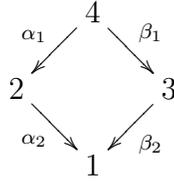
Définition 2.4.2 Soient (Q, I) et (Q', I') deux carquois liés.

a) Un **morphisme de carquois** $f : Q \rightarrow Q'$ est la donnée de deux applications

$f_0 : Q_0 \rightarrow Q'_0$ et $f_1 : Q_1 \rightarrow Q'_1$ telles que pour toute flèche $\alpha : x \rightarrow y$ dans Q on ait une flèche $f_1(\alpha) : f_0(x) \rightarrow f_0(y)$ dans Q' , c'est-à-dire que f_0 et f_1 vérifient les relations $s \circ f_1 = f_0 \circ s$ et $b \circ f_1 = f_0 \circ b$. Un morphisme de carquois $f : Q \rightarrow Q'$ induit de façon évidente une application k -linéaire $kf : kQ \rightarrow kQ'$.

- b) Un **morphisme de carquois liés** $f : (Q, I) \rightarrow (Q', I')$ est un morphisme de carquois $f : Q \rightarrow Q'$ tel que $kf(I) \subseteq I'$.

Exemple 2.4.3 Considérons le carquois



et soient $I = \langle \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 \rangle$, et $I' = \langle \alpha_1\alpha_2, \beta_1\beta_2 \rangle$. L'identité sur Q induit un morphisme de carquois liés $f : (Q, I) \rightarrow (Q, I')$.

Notons cependant que le morphisme induit dans l'autre sens n'est pas un morphisme de carquois liés : en effet, $\alpha_1\alpha_2 \in I'$, mais $\alpha_1\alpha_2 \notin I$.

Nous avons que $\mathcal{B}(Q, I)$ est homéomorphe au disque $B^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$. D'autre part, l'espace classifiant $\mathcal{B}(Q, I')$ est homéomorphe au cercle S^1 . Ainsi, il n'existe pas d'application cellulaire de $\mathcal{B}(Q, I)$ vers $\mathcal{B}(Q, I')$ qui ne soit pas homotopiquement triviale.

Mentionnons finalement que F. Colin, dans [22] a considéré le problème de la functorialité. Notamment, il a mis au point la notion de **morphisme strict** de carquois lié, et montré qu'en considérant la catégorie des carquois liés avec les morphismes stricts, il est possible d'obtenir un foncteur vers la catégorie des complexes différentiels de groupes abéliens. Le morphisme de l'exemple précédent est un morphisme strict.

Chapitre 3

HOMOTOPIE

Dans ce chapitre nous étudions l'homotopie de l'espace $\mathcal{B} = \mathcal{B}(Q, I)$. Naturellement, nous commençons par le cas le plus facile à traiter : celui où la relation d'homotopie dans (Q, I) est triviale, c'est à dire le cas où l'idéal I est monomial. Notamment, nous verrons que dans ce cas le graphe sous-jacent à Q a le même type d'homotopie que \mathcal{B} . Par la suite, dans le contexte général, nous étudions le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{B})$. Plus particulièrement, nous montrons qu'il est isomorphe à $\pi_1(Q, I)$. Ceci nous permet d'obtenir une présentation du dernier, des résultats sur les groupes fondamentaux d'extensions ponctuelles d'algèbres, ainsi que des versions de théorèmes bien connus en topologie algébrique adaptés au contexte des carquois liés. Dans la troisième section, nous verrons qu'à défaut d'être fonctorielle, la construction de $\mathcal{B}(Q, I)$ se comporte bien par rapport aux revêtements.

3.1 Le cas monomial

Nous avons vu à l'exemple 2.3.2 c) que lorsque l'idéal I est engendré par les chemins de longueur 2, l'espace $\mathcal{B}(Q, I)$ n'est autre que le graphe sous-jacent à Q . Une conséquence immédiate de ceci est que dans ce cas nous avons

$$\pi_1(\mathcal{B}(Q, I)) = \pi_1(Q) = \pi_1(Q, I).$$

Nous verrons que ceci s'inscrit dans le cadre d'un résultat beaucoup plus général concernant les espaces classifiants de carquois liés par des idéaux monomiaux. Dans cette situation, aucune relation n'est minimale, de sorte que la relation d'homotopie, ainsi que la relation d'homotopie naturelle dans (Q, I) sont triviales. Ainsi, les cellules de $\mathcal{B}(Q, I)$

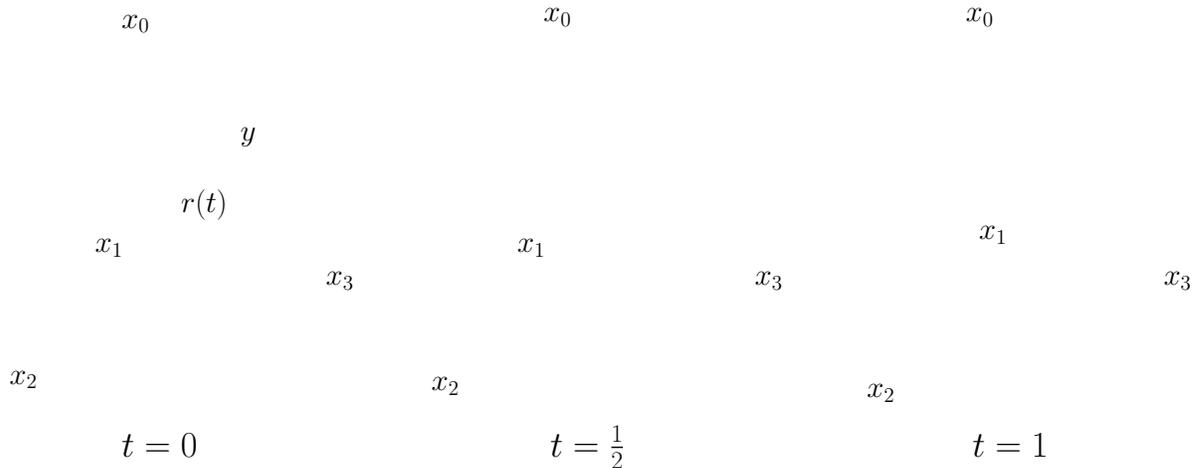
sont de la forme $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ lorsque $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$ est un chemin ne se trouvant pas dans I , et où $\sigma_i \neq \varepsilon_x$ pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et tout sommet x de Q . La relation d'homotopie, ainsi que celle d'homotopie naturelle étant triviales, on pourrait s'attendre à ce que les cellules de $\mathcal{B}(Q, I)$ se recollent de façon triviale, de sorte à pouvoir les "écraser" sans modifier le type d'homotopie de $\mathcal{B}(Q, I)$. Plus précisément, considérons une cellule maximale dans $\mathcal{B}(Q, I)$, que nous notons $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$. Il suit de la maximalité de cette dernière que ses faces, sauf peut-être $(\sigma_2, \dots, \sigma_n)$ et $(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$ sont des faces libres, c'est à dire que ce sont des faces de la cellule $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ uniquement. Ainsi, il est possible "d'écraser" la cellule $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ sur les faces $(\sigma_2, \dots, \sigma_n)$ et $(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$ sans changer le type d'homotopie de l'espace. L'énoncé suivant formalise ce qui précède.

Lemme 3.1.1 *Soit (Q, I) un carquois lié avec I monomial, tel que l'algèbre $A = kQ/I$ est presque triangulaire, et $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ un chemin ne se trouvant pas dans I et maximal pour cette propriété. Posons $I' = I + \langle \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \rangle$. Alors, $\mathcal{B}(Q, I')$ est un retract de déformation de $\mathcal{B}(Q, I)$.*

Démonstration : Notons tout d'abord que l'idéal I étant monomial, la relation d'homotopie est triviale, de sorte que pour un chemin quelconque w , nous avons $\widehat{w} = w$. Par ailleurs, la cellule $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est une cellule maximale de $\mathcal{B}(Q, I)$. Posons, pour tout i tel que $1 \leq i < n$, $x_i = s(\alpha_{i+1})$, et $x_n = b(\alpha_n)$. Étant donné que $A = kQ/I$ est presque triangulaire, l'image dans $\mathcal{B}(Q, I)$ de la cellule α est homéomorphe au n -simplexe affine $\Delta_\alpha^n = [x_0, x_1, \dots, x_n]$.

Soit $y = \frac{1}{2}(x_0 + x_n)$ le milieu du côté $[x_0, x_n]$. Avec le nouveau point, nous avons une division

$$[x_0, x_1, \dots, x_n] = [x_0, \dots, x_{n-1}, y] \cup [y, x_1, \dots, x_n]$$



Pour $t \in [0,1]$, posons $r(t) = (1-t)y + tx_1$. Autrement dit, r est le chemin joignant y à x_1 le long du segment $[y, x_1]$. Soient p et q des points de $[x_0, \dots, x_{n-1}, y]$ et $[y, x_1, \dots, x_n]$, respectivement, et $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$ leurs coordonnées barycentriques, c'est à dire

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i x_i + \lambda_n y, \quad \text{et} \quad q = \mu_0 y + \sum_{i=1}^n \mu_i x_i$$

Considérons les fonctions $\rho_1 : [x_0, \dots, x_{n-1}, y] \times [0,1] \rightarrow [x_0, \dots, x_{n-1}, y]$ et $\rho_2 : [y, x_1, \dots, x_n] \times [0,1] \rightarrow [y, x_1, \dots, x_n]$ définies par

$$\begin{aligned} \rho_1 \left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i x_i + \lambda_n y, t \right) &= \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i x_i + \lambda_n r(t) \\ \rho_2 \left(\mu_0 y + \sum_{i=1}^n \mu_i x_i, t \right) &= \mu_0 r(t) + \sum_{i=1}^n \mu_i x_i \end{aligned}$$

Il est clair que ces dernières sont continues, et nous avons

$$\rho_1(p,0) = p \quad \text{et} \quad \rho_1(p,1) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i x_i + \lambda_n x_1$$

qui est un point de $[x_0, \dots, x_{n-1}]$. Par ailleurs, un point p appartient à $[x_0, \dots, x_{n-1}]$, si et seulement si $\lambda_n = 0$. Il est clair que pour un tel point et tout $t \in [0,1]$ nous avons $\rho_1(p,t) = p$. De même, si q est un point de $[y, x_1, \dots, x_n]$,

$$\begin{aligned} \rho_2(q,0) &= q \\ \rho_2(q,1) &\in [y, x_1, \dots, x_n] \quad \text{et} \\ \rho_2(q,t) &= q \quad \text{lorsque } q \in [x_1, \dots, x_n] \end{aligned}$$

L'intersection de $[x_0, \dots, x_{n-1}, y]$ et $[y, x_1, \dots, x_n]$ est leur face commune $[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y]$. Pour un point p dans cette intersection, et $t \in [0,1]$, nous avons

$$\begin{aligned} \rho_1(p,t) &= \rho_1 \left(0x_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i + \lambda_n y, t \right) \\ &= 0x_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i + \lambda r(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i + 0x_n + \lambda r(t) \\ &= \rho_2(p,t) \end{aligned}$$

Ainsi, ρ_1 et ρ_2 coïncident sur l'intersection de leurs domaines, de sorte qu'il existe une unique fonction ρ' qui les prolonge. Mais comme $[x_0, x_1, \dots, x_n] = [x_0, \dots, x_{n-1}, y] \cup [y, x_1, \dots, x_n]$, nous avons $\rho' : [x_0, x_1, \dots, x_n] \times [0, 1] \rightarrow [x_0, x_1, \dots, x_n]$ et il est immédiat de vérifier que pour tout point $p \in [x_0, x_1, \dots, x_n]$ et tout $t \in [0, 1]$, nous avons

$$\begin{aligned} \rho'(p, 0) &= p \\ \rho'(p, 1) &\in [x_0, \dots, x_{n-1}] \cup [x_1, \dots, x_n] \quad \text{et} \\ \rho'(p, t) &= p \quad \text{lorsque } p \in [x_0, \dots, x_{n-1}] \cup [x_1, \dots, x_n] \end{aligned}$$

Soit $\phi : [x_0, \dots, x_n] \rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ l'homéomorphisme mentionné au début de la preuve, et posons $\rho = \phi \circ \rho' \circ (\phi^{-1}, id)$. Finalement, prolongeons ρ à tout $\mathcal{B}(Q, I)$ en définissant $\rho' : \mathcal{B}(Q, I) \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{B}(Q, I)$ comme étant ρ sur la cellule $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et l'identité partout ailleurs. Remarquons que cette définition n'est pas ambiguë du fait que dans un CW-complexe quelconque X , un point $x \in X$ appartient à une et une seule cellule de X .

L'espace $\rho'(\mathcal{B}(Q, I), 1)$ qui est, en vertu de ce qui précède, un retract de déformation de $\mathcal{B}(Q, I)$, est l'espace obtenu en écrasant la cellule $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ sur ses faces $(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$. Il est aisé de voir que ce dernier est en fait l'espace classifiant du carquois Q lié par l'idéal $I + \langle \alpha_1 \cdots \alpha_n \rangle$.

□

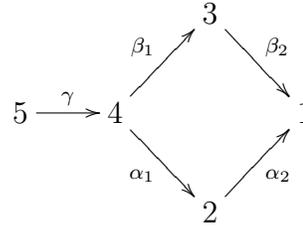
Théorème 3.1.2 *Soit (Q, I) un carquois lié, avec I un idéal monomial et tel que $A = kQ/I$ est presque triangulaire. Alors le graphe sous-jacent à Q , vu comme sous-espace de $\mathcal{B}(Q, I)$, est un retract de déformation de celui-ci.*

Démonstration : Si l'idéal I est F^2 , alors il n'y a rien à prouver (voir exemple 2.3.2 c)). Sinon, il existe un chemin $w_1 = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r$ de longueur supérieure ou égale à 3 dans Q , et qui ne se trouve pas dans I . Nous pouvons supposer w_1 maximal pour cette propriété. Posons alors $I_1 = I + \langle w_1 \rangle$, qui est encore une fois un idéal monomial. Il suit du lemme précédent que l'espace $\mathcal{B}(Q, I_1)$ est un retract de déformation de $\mathcal{B}(Q, I)$. En outre, le premier comporte un nombre de cellules strictement inférieur au nombre de cellule de $\mathcal{B}(Q, I)$, et en plus $A = kQ/I_1$ est presque triangulaire. Si $I_1 = F^2$, nous avons terminé. Sinon, nous pouvons recommencer le processus. Celui-ci doit s'arrêter après un nombre fini d'étapes. En effet, l'idéal I étant admissible, $\mathcal{B}(Q, I)$ n'admet qu'un nombre fini de cellules.

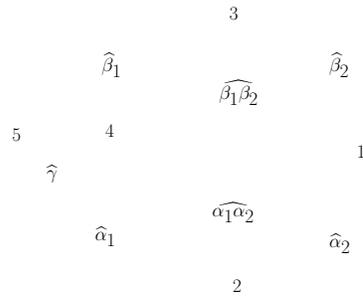
□

Exemples 3.1.3

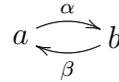
a) Soit Q le carquois



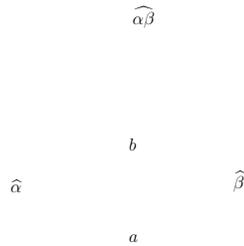
lié par l'idéal monomial $I = \langle \gamma\alpha_1, \gamma\beta_1 \rangle$. L'espace classifiant $\mathcal{B}(Q)$ est alors schématisé dans la figure suivante.



b) Soit Q le carquois



lié par l'idéal $I = \langle \beta\alpha \rangle$. L'espace classifiant $\mathcal{B}(Q, I)$ est schématisé ci-dessous.

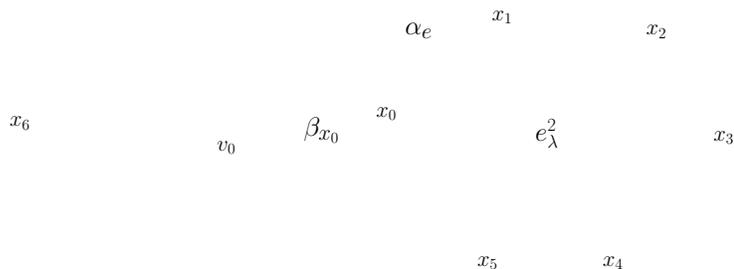


Remarquons cependant que l'algèbre $A = kQ/I$ n'est pas presque triangulaire. En effet, $e_a A e_b \simeq e_b A e_a \simeq k$.

3.2 Groupes Fondamentaux

Dans cette section, nous comparons le groupe fondamental de l'espace classifiant $\mathcal{B}(Q,I)$ au groupe fondamental du carquois lié (Q,I) . Plus précisément, nous montrons que ces deux groupes sont isomorphes. Avant d'entrer dans les détails, nous faisons un bref rappel concernant le groupe fondamental d'un CW-complexe. Il s'agit là de matériel standard de topologie algébrique, de sorte que nous omettons les détails techniques. On pourra consulter [45, 55, 56] pour plus de détails à ce sujet.

Étant donné un CW-complexe connexe X , son groupe fondamental peut être décrit de façon combinatoire somme suit : on commence par choisir une 0-cellule v_0 et un arbre maximal M de X . Autrement dit, M est un sous-complexe de dimension inférieure ou égale à 1, acyclique, et maximal pour cette propriété. Si e_λ^1 est une 1-cellule de X , soit $\psi_\lambda : \Delta_\lambda^1 \rightarrow \bar{e}_\lambda^1$ une application caractéristique, c'est à dire une fonction continue telle que la restriction de ψ_λ à $\Delta_\lambda^1 \setminus \partial\Delta_\lambda^1$ est un homéomorphisme d'image e_λ^1 , et $\psi_\lambda(\partial\Delta_\lambda^1)$ est contenue dans une union de cellules de dimension 0 de X . En particulier, ψ_λ représente (moyennant l'homéomorphisme canonique $\varphi : [0,1] \rightarrow \Delta^1$) un chemin de $\psi_\lambda\varphi(0)$ (le point initial du chemin) vers $\psi_\lambda\varphi(1)$ (le point terminal) dans X . Sa classe d'homotopie sera notée $\kappa_\lambda = \kappa_\lambda^1$. Naturellement, κ_λ^{-1} est la classe du chemin dans le sens opposé. Nous pouvons ainsi considérer κ_λ comme une 1-cellule (arête) orientée, et κ_λ^{-1} comme la même cellule orientée dans le sens inverse. Un **chemin d'arêtes** dans X est une suite $\kappa_1^{\epsilon_1} \cdots \kappa_n^{\epsilon_n}$, avec $\epsilon_i \in \{-1,1\}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et telle que le point terminal de $\kappa_i^{\epsilon_i}$ est le point initial de $\kappa_{i+1}^{\epsilon_{i+1}}$. Par ailleurs, pour chaque 2-cellule e_λ^2 de X , soit α_e la classe d'homotopie d'un chemin d'arête qui commence dans une 0-cellule x_0 se trouvant dans ∂e_λ^2 et qui fait le tour de e_λ^2 une fois, c'est à dire parcourt chacune des 1-cellules se trouvant dans ∂e_λ^2 . Par ailleurs, soit β_{x_0} l'unique classe d'homotopie de chemin d'arête joignant v_0 à x_0 le long de M . Finalement, considérons le chemin d'arête $\gamma_e = \beta_{x_0}\alpha_e\beta_{x_0}^{-1}$.



Soit G le groupe libre ayant pour base l'ensemble des 1-cellules de X , et N le sous-groupe distingué de G engendré par les éléments suivants :

1. Les cellules se trouvant dans M ;
2. Les éléments γ_e définis précédemment.

Avec ces notations, le groupe fondamental de X est $\pi_1(X) \simeq \pi_1(X, v_0) \simeq G/N$ (voir théorème 2.1, p 213 dans [45], ou encore pages 223 à 227 dans [56]).

Exemple 3.2.1 Soit X un CW-complexe connexe de dimension 1, autrement dit, un graphe connexe. Soient X_1 et X_0 l'ensemble des arêtes et celui des sommets de X , respectivement. Ainsi, un arbre maximal dans X est un sous-graphe ayant $|X_0| - 1$ arêtes, et passant par tous les sommets de X . Le groupe G est le groupe libre en $|X_1|$ générateurs, et, comme il n'y a pas de cellules de dimension 2, le groupe N est le normalisateur du sous groupe engendré par les $|X_0| - 1$ éléments correspondant aux arêtes de l'arbre maximal choisi. Il suit alors que $\pi_1(X) \simeq G/N$ est isomorphe au groupe libre en $|X_1| - |X_0| + 1 = \chi(X)$ éléments.

Les complexes qui nous intéressent sont de la forme $\mathcal{B}(Q, I)$ et dans ce cas toutes les 2-cellules sont de la forme $(\widehat{\sigma}_1, \widehat{\sigma}_2)$. Étant donné que le bord d'une telle 2-cellule est la réunion de 3 cellules de dimension 1, à savoir $\widehat{\sigma}_2$, $\widehat{\sigma}_1\widehat{\sigma}_2$, et $\widehat{\sigma}_1$, de sorte que $\widehat{\sigma}_1\widehat{\sigma}_2N = \widehat{\sigma}_1\widehat{\sigma}_2N$. Ainsi, nous pouvons améliorer la description précédente de $\pi_1(\mathcal{B}(Q, I))$.

Lemme 3.2.2 Soient (Q, I) un carquois lié et T un arbre maximal de Q . Soient F le groupe libre ayant pour base l'ensemble des flèches de Q , et K le sous-groupe distingué de F engendré par les éléments suivants :

- 1) Les flèches α se trouvant dans T ;
- 2) $(\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_r)(\beta_1\beta_2 \cdots \beta_s)^{-1}$ lorsque $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_r$ et $\beta_1\beta_2 \cdots \beta_s$ sont deux chemins apparaissant dans une relation minimale.

Alors, il y a isomorphisme de groupes $\pi_1(\mathcal{B}(Q, I)) \simeq F/K$.

Démonstration : Comme T un arbre maximal dans Q , T est donné par un ensemble de flèches de Q , et passe par tous les points de ce dernier. Il suit de la construction de $\mathcal{B}(Q, I)$ qu'une flèche $\alpha : x \rightarrow y$ de T donne lieu à une 1-cellule $\widehat{\alpha}$ de $\mathcal{B}(Q, I)$. D'autre part, l'ensemble des 0-cellules de $\mathcal{B}(Q, I)$ est en bijection avec Q_0 , de sorte que les 1-cellules obtenues à partir des flèches de T forment un arbre maximal dans $\mathcal{B}(Q, I)$, qu'on notera M . On remarquera cependant que l'arbre M n'est pas l'espace $\mathcal{B}(T)$. Par ailleurs, soient G et N les groupes décrits précédemment.

Considérons l'application $\phi : F \rightarrow G/N$ définie par $\alpha \mapsto \widehat{\alpha}N$. Afin de montrer que ϕ induit un homomorphisme de groupes $\Phi : F/K \rightarrow G/N$, nous devons montrer que K est contenu dans $\text{Ker } \phi$.

Pour une flèche α de T nous avons $\phi(\alpha) = \widehat{\alpha}N = N$, puisque la 1-cellule $\widehat{\alpha}$ est dans l'arbre maximal M .

Par ailleurs, si $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_r$ et $\beta_1\beta_2 \cdots \beta_s$ sont deux chemins apparaissant dans une relation minimale de (Q, I) , nous avons

$$\begin{aligned}
 \widehat{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r} N &= \widehat{\alpha_1 \cdots \alpha_n} N \\
 &= \widehat{\beta_1 \cdots \beta_s} N \\
 &= \widehat{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_s} N.
 \end{aligned}$$

de sorte que $\phi(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r) = \phi(\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_s)$, ce qui prouve que $(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r)(\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_s)^{-1}$ est dans le noyau de ϕ . Ainsi, nous avons un homomorphisme de groupes $\Phi : F/K \rightarrow G/N$ défini par $\alpha K \mapsto \widehat{\alpha} N$.

Afin de montrer que Φ est un isomorphisme, nous construisons son inverse. Si $\widehat{\sigma}$ est une 1-cellule de $\mathcal{B}(Q, I)$, alors il existe des flèches $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ dans Q telles que $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r \wedge \sigma$ et $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r \notin I$. Posons $\psi(\widehat{\sigma}) = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r K$. Tout d'abord, montrons que cette règle définit une application $\psi : G \rightarrow F/K$, c'est-à-dire que $\psi(\widehat{\sigma})$ ne dépend pas du choix des flèches $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$. Supposons donc que $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ sont des flèches de Q telles que $\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_s \notin I$ et $\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_s \wedge \sigma$. En particulier, nous avons alors $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r \wedge \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_s$. Il suit alors de la définition de K que $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r K = \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_s K$, de sorte que ψ est correctement définie. Encore une fois, afin de montrer que ψ induit un homomorphisme de groupes $\Psi : G/N \rightarrow F/K$, il suffit de montrer que N est inclus dans le noyau de ψ .

Il suit de la construction de M que les 1-cellules de M sont de la forme $\widehat{\alpha}$ avec α une flèche de T . Ainsi, pour les 1-cellules se trouvant dans M , nous avons bien $\psi(\widehat{\alpha}) = \alpha K = K$. Par ailleurs, si $\sigma = (\widehat{\sigma}_1, \widehat{\sigma}_2)$ est une 2-cellule de $\mathcal{B}(Q, I)$, il existe des flèches $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ et $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ telles que $\sigma_1 \wedge \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r$, $\sigma_2 \wedge \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_s$, et $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_s \notin I$. Soit $x = s(\alpha_1)$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
 \psi(\widehat{\sigma}_1 \widehat{\sigma}_2) &= \psi(\widehat{\sigma}_1) \psi(\widehat{\sigma}_2) \\
 &= (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r) K (\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_s) K \\
 &= \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_s K \\
 &= \psi(\widehat{\sigma_1 \sigma_2})
 \end{aligned}$$

ce qui montre que $\widehat{\sigma}_1 \widehat{\sigma}_2 (\widehat{\sigma_1 \sigma_2})^{-1}$ est dans le noyau de ψ et alors

$$\psi(\gamma_\sigma) = \psi(\beta_x \widehat{\sigma}_1 \widehat{\sigma}_2 (\widehat{\sigma_1 \sigma_2})^{-1} \beta_x^{-1}) = K.$$

Ainsi, nous obtenons un homomorphisme de groupes $\Psi : G/N \rightarrow F/K$ défini par $\widehat{\alpha_1 \cdots \alpha_r} N \mapsto \alpha_1 \cdots \alpha_r K$.

Finalement, il est aisé de vérifier que Ψ et Φ sont mutuellement inverses. □

Forts du dernier lemme, nous sommes en mesure d'énoncer et de prouver le théorème principal de cette section, résultat établi dans [16].

Théorème 3.2.3 *Soient (Q, I) un carquois lié, peut être avec des cycles orientés, et $\mathcal{B} = \mathcal{B}(Q, I)$ son espace classifiant. Alors les groupes $\pi_1(Q, I)$ et $\pi_1(\mathcal{B})$ sont isomorphes.*

Démonstration : Soient (Q, I) un carquois lié connexe, et T un arbre maximal dans Q . Fixons un sommet v_0 de Q , qui sera par la suite le point de base. En vertu du lemme précédent, et avec les mêmes notations, il suffit de montrer que $\pi_1(Q, I, v_0)$ est isomorphe à F/K . Pour ce faire, définissons, pour chaque sommet x de Q , la marche w_x comme étant l'unique marche réduite allant de v_0 à x le long de T . En particulier nous avons $w_{v_0} = e_{v_0}$, la marche triviale.

Étant donnée une flèche $\alpha : x \rightarrow y$ de Q , posons $\phi(\alpha) = \widetilde{w_x \alpha w_y^{-1}}$. Ceci définit un homomorphisme de groupes $\phi : F \rightarrow \pi_1(Q, I, v_0)$. Comme précédemment, nous voulons montrer que ϕ induit un homomorphisme de groupes $\Phi : F/K \rightarrow \pi_1(Q, I, v_0)$. Pour ceci, il suffit de montrer que K est contenu dans le noyau de ϕ .

Pour une flèche $\alpha : x \rightarrow y$ se trouvant dans T , la marche $w_x \alpha w_y^{-1}$ est une marche le long de T qui est un arbre, donc acyclique. Il suit alors que $\phi(\alpha) = \widetilde{w_x \alpha w_y^{-1}} = \widetilde{e_{v_0}}$.

D'autre part, supposons que $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r$ et $\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_s$ sont deux chemins naturellement homotopes joignant x à y . Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, qu'ils apparaissent dans une même relation minimale.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \alpha_1 & \rightarrow & p_1 & \xrightarrow{\alpha_2} & p_2 & \longrightarrow \cdots & \xrightarrow{\alpha_{r-1}} & p_{r-1} & \xrightarrow{\alpha_r} & y \\
 x & \nearrow & & & & & & & & & \\
 & \beta_1 & \rightarrow & q_1 & \xrightarrow{\beta_2} & q_2 & \longrightarrow \cdots & \xrightarrow{\beta_{s-1}} & q_{s-1} & \xrightarrow{\beta_s} & y
 \end{array}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
 \phi(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r) &= \phi(\alpha_1) \phi(\alpha_2) \cdots \phi(\alpha_r) \\
 &= \widetilde{w_x \alpha_1 w_{p_1}^{-1} w_{p_1} \alpha_2 w_{p_2}^{-1} \cdots w_{p_{r-1}} \alpha_r w_y^{-1}} \\
 &= \widetilde{w_x \alpha_1 \cdots \alpha_r w_y^{-1}} \\
 &= \widetilde{w_x \beta_1 \cdots \beta_s w_y^{-1}} \\
 &= \widetilde{w_x \beta_1 w_{q_1}^{-1} w_{q_1} \beta_2 w_{q_2}^{-1} \cdots w_{q_{s-1}} \beta_s w_y^{-1}} \\
 &= \phi(\beta_1) \phi(\beta_2) \cdots \phi(\beta_s) \\
 &= \phi(\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_s)
 \end{aligned}$$

ce qui montre que ϕ induit un homomorphisme de groupes $\Phi : F/K \rightarrow \pi_1(Q, I, v_0)$ défini par $\alpha K \mapsto \widetilde{w_x \alpha w_y^{-1}}$ lorsque $\alpha : x \rightarrow y$.

Encore une fois, afin de montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme, nous construisons son inverse $\Psi : \pi_1(Q, I, v_0) \rightarrow F/K$. Rappelons qu'une marche est soit une marche triviale ε_x ,

soit une suite de flèches et d'inverses formels de flèches $w = \alpha_1^{\epsilon_1} \alpha_2^{\epsilon_2} \cdots \alpha_r^{\epsilon_r}$ avec $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ pour tout i tel que $1 \leq i \leq r$. Sur l'ensemble des marches de Q , définissons la relation \sim_ψ par $\varepsilon_x \sim_\psi \alpha \alpha^{-1}$, et $\varepsilon_y \sim_\psi \alpha^{-1} \alpha$ pour toute flèche $\alpha : x \rightarrow y$, et $\alpha_1^{\epsilon_1} \alpha_2^{\epsilon_2} \cdots \alpha_r^{\epsilon_r} \sim_\psi \beta_1^{\delta_1} \beta_2^{\delta_2} \cdots \beta_s^{\delta_s}$ si et seulement si $\alpha_1^{\epsilon_1} \alpha_2^{\epsilon_2} \cdots \alpha_r^{\epsilon_r} K = \beta_1^{\delta_1} \beta_2^{\delta_2} \cdots \beta_s^{\delta_s} K$. Nous avons alors :

- a) Pour toute flèche $\alpha : x \rightarrow y$ de Q nous avons $\alpha \alpha^{-1} \sim_\psi \varepsilon_x$ et $\alpha^{-1} \alpha \sim_\psi \varepsilon_y$, par définition.
- b) Si $\rho = \sum_{i=1}^t$ est une relation minimale, alors $w_i \wedge w_j$, pour tous $i, j \in \{1, \dots, t\}$, de sorte que $w_i K = w_j K$, c'est à dire $w_i \sim_\psi w_j$,
- c) Si u, v, w et w' sont des marches telles que $w \sim_\psi w'$, alors, naturellement $wK = w'K$. Si les compositions uwv et $uw'v$ sont définies, nous avons

$$(uwv)K = uK wK vK = uK w'K vK = (uw'v)K,$$

ce qui revient à dire que $uwv \sim_\psi uw'v$.

La relation \sim étant la plus petite relation d'équivalence sur $\mathcal{M}(Q, I, v_0)$ vérifiant les conditions a), b) et c), nous avons que $w \sim w'$ entraîne $w \sim_\psi w'$. Ainsi, nous avons un homomorphisme de groupes $\Psi : \pi_1(Q, I, v_0) \rightarrow F/K$ défini par $\tilde{w} \mapsto wK$.

Finalement, nous montrons que Ψ et Φ sont mutuellement inverses.

Pour une marche $w = \alpha_1^{\epsilon_1} \alpha_2^{\epsilon_2} \cdots \alpha_r^{\epsilon_r}$ avec $s(\alpha_i^{\epsilon_i}) = v_{i-1}$ et $b(\alpha_r^{\epsilon_r}) = v_0$, nous avons

$$\begin{aligned} \Phi\Psi(\tilde{w}) &= \Phi(\alpha_1^{\epsilon_1} \alpha_2^{\epsilon_2} \cdots \alpha_r^{\epsilon_r} K) \\ &= \phi(\alpha_1^{\epsilon_1} \alpha_2^{\epsilon_2} \cdots \alpha_r^{\epsilon_r}) \\ &= \phi(\alpha_1^{\epsilon_1}) \phi(\alpha_2^{\epsilon_2}) \cdots \phi(\alpha_r^{\epsilon_r}) \\ &= \widetilde{e_{v_0} \alpha_1^{\epsilon_1} w_{v_1}^{-1} w_{v_1} \alpha_2^{\epsilon_2} w_{v_2}^{-1} \cdots w_{v_{r-1}} \alpha_r^{\epsilon_r} w_{v_r}^{-1}} \\ &= \widetilde{e_{v_0} \alpha_1^{\epsilon_1} \alpha_2^{\epsilon_2} \cdots \alpha_r^{\epsilon_r} e_{v_0}} \\ &= \widetilde{\alpha_1^{\epsilon_1} \alpha_2^{\epsilon_2} \cdots \alpha_r^{\epsilon_r}} \\ &= \tilde{w} \end{aligned}$$

Inversement, pour une flèche $\alpha : x \rightarrow y$, nous avons

$$\begin{aligned} \Psi\Phi(\alpha K) &= \Psi(\phi(\alpha)) \\ &= \Psi(\widetilde{w_x \alpha w_y^{-1}}) \\ &= \widetilde{w_x \alpha w_y^{-1} K} \\ &= \alpha K \end{aligned}$$

□

Une conséquence immédiate du résultat précédent est le corollaire suivant [16].

Corollaire 3.2.4 *Soit $A = kQ/I$ une algèbre triangulaire. Alors A est simplement connexe si et seulement si pour toute présentation de (Q,I) de A , l'espace classifiant $\mathcal{B}(Q,I)$ est un espace topologique simplement connexe.*

□

Une remarque importante est que contrairement au théorème 2.2 de [15], aucune hypothèse sur la triangularité du carquois n'est requise. Ceci est dû au fait que, comme nous l'avons mentionné au chapitre 2, la construction de $\mathcal{B}(Q,I)$ est considérablement plus fine que celle de $|A|$. Le résultat mentionné ci-dessus (théorème 2.2 de [15]) est une conséquence immédiate du théorème 3.2.3.

Corollaire 3.2.5 [15] *Soit $A = kQ/I$ une algèbre schurienne presque triangulaire. Alors, les groupes $\pi_1(|A|)$ et $\pi_1(Q,I)$ sont isomorphes.*

Démonstration : En effet, avec ces hypothèses, l'espace classifiant $\mathcal{B}(Q,I)$ est précisément le complexe simplicial $|A|$ (voir 2.3.3). Le résultat suit alors du théorème 3.2.3

□

Une autre remarque importante est que le théorème 3.2.3 et le lemme 3.2.2 fournissent une présentation du groupe $\pi_1(Q,I)$. Ceci nous permet d'obtenir directement le résultat suivant, établi dans [32].

Théorème 3.2.6 *Soit $E_{n,t}$ l'ensemble $\{0,1,\dots,n-1\} \times \{0,1,\dots,t\}$ ordonné par $(i,l) \preceq (i,k)$ lorsque $l \leq k$, et $(i,j) \preceq (i+1,j+1)$ pour tous i, j tels que $0 \leq i \leq n-1$ et $0 \leq j \leq t-1$. Notons $A_{n,t}$ l'algèbre d'incidence correspondante. Alors*

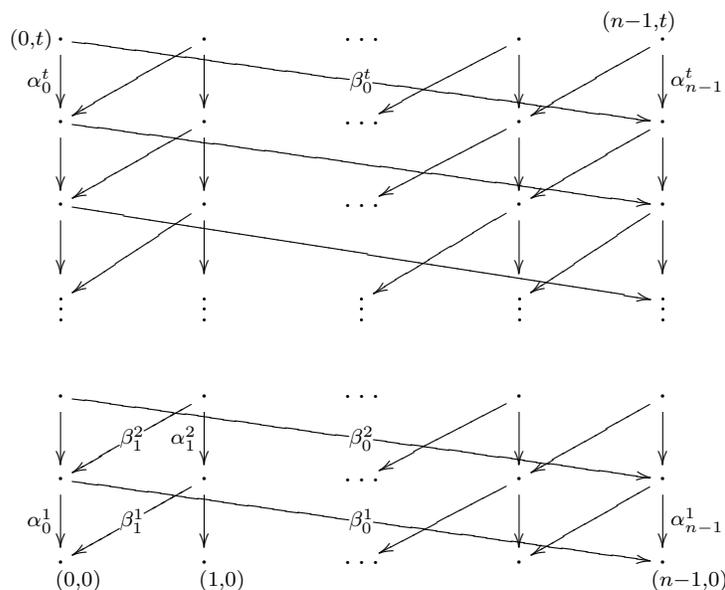
$$\pi_1(A_{n,t}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } t < n, \\ 1 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Démonstration : Tout d'abord fixons les notations. Soient

α_i^j la flèche allant de (i,j) vers $(i,j-1)$, pour $0 \leq i \leq n-1$ et $1 \leq j \leq t$;

β_i^j la flèche allant de (i,j) vers $(i-1,j-1)$, pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq t$;

β_0^i la flèche allant de $(0,j)$ vers $(n-1,j-1)$, pour $1 \leq j \leq t$.



Soit T l'arbre maximal dans $Q_{E_n,t}$ donné par les flèches α_i^j et β_i^1 , pour $1 \leq i \leq n-1$. Soit F le groupe libre ayant comme base l'ensemble des flèches de $Q_{E_n,t}$, et K le sous-groupe distingué de F engendré par les éléments suivants :

- 1) Les flèches de T .
- 2) $(\gamma_1 \cdots \gamma_s)(\xi_1 \cdots \xi_r)^{-1}$ lorsque $\gamma_1 \cdots \gamma_s$ et $\xi_1 \cdots \xi_r$ sont deux chemins parallèles.

Dans un premier temps, considérons le cas $t \geq n$. Nous avons

$$\alpha_1^2 \beta_1^1 K = \beta_1^2 \alpha_0^1 K$$

Mais, les flèches α_0^1 , α_1^2 , et β_1^1 se trouvent dans T , de sorte que $\beta_1^2 K = K$, c'est-à-dire $\beta_1^2 \in K$. De la même façon, on montre que les flèches β_i^j sont dans K pour tout j et tout i tel que $1 \leq i \leq n-1$, et que $\beta_0^j K = \beta_0^k K$ pour tous j et k . Par ailleurs nous avons :

$$\alpha_0^n \alpha_0^{n-1} \cdots \alpha_0^1 K = \beta_0^n \beta_0^{n-1} \cdots \beta_0^1 K$$

ce qui montre que $\beta_0^n K = K$. Ainsi, tous les générateurs de F se trouvent dans K , de sorte que le quotient F/K est trivial, et le résultat suit.

Considérons maintenant le cas $t < n$. Dans ce cas, les mêmes arguments montrent que les flèches β_i^j sont dans K pour tout i tel que $1 \leq i \leq n-1$. En outre, les flèches β_0^j sont encore congrues entre elles modulo K . Cependant, dans ce cas la classe $\beta_0^j K$ est libre dans F/K .

□

Avant de continuer, quelques définitions s'imposent.

Soit $\nu : kQ_A \rightarrow A$ une présentation d'une algèbre triangulaire A , avec $I_\nu = \text{Ker } \nu$, et x une source dans Q_A . Ainsi, A est une extension ponctuelle par x d'une algèbre B . Qui plus est, le carquois de B , Q_B est obtenu en biffant le point x de Q_A . La restriction de ν à kQ_B fournit une présentation $\mu : kQ_B \rightarrow B$. Posons $I_\mu = \text{Ker } \mu$. Ainsi, lorsque Q_B est connexe, nous avons un morphisme de groupes fondamentaux $\pi_1(i) : \pi_1(Q_B, I_\mu) \rightarrow \pi_1(Q_A, I_\nu)$. Nous nous proposons de calculer explicitement $\text{Coker } \pi_1(i)$, ce qui généralisera un résultat de [3].

Étant donné un point x de Q_A , soit x^+ l'ensemble des flèches ayant x comme source. Comme dans [4], définissons \approx comme étant la plus fine relation d'équivalence sur x^+ telle que $\alpha \approx \beta$ lorsqu'il existe un sommet y de Q_A et une relation minimale $\sum_{i=1}^r \lambda_i w_i \in I_\nu(x, y)$ avec $w_1 = \alpha w'_1$, et $w_2 = \beta w'_2$. Notons $[\alpha]_\nu$ la classe d'équivalence de α , et $t(\nu) = |x^+ / \approx|$, le nombre de classes d'équivalence.

Proposition 3.2.7 *Avec les notations et les hypothèses précédentes, le conoyau de $\pi_1(i) : \pi_1(Q_B, I_\mu) \rightarrow \pi_1(Q_A, I_\nu)$ est le groupe libre en $t(\nu) - 1$ générateurs.*

Démonstration : Afin d'alléger les notations, nous écrirons i_* au lieu de $\pi_1(i)$. Soient $t = t(\nu)$ et $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t\}$ un ensemble complet de représentants des classes de \approx . Pour $i \in \{1, 2, \dots, t\}$, posons $a_i = [\alpha_i]_\nu$. Nous montrerons que $\text{Coker } i_*$ est le groupe libre ayant pour base $\{a_2, \dots, a_t\}$, que nous noterons L_{t-1} .

Soient T_B un arbre maximal de Q_B , et F_B, K_B les groupes décrits au lemme 3.2.2. Par ailleurs, soit T_A l'arbre obtenu à partir de T_B en ajoutant la flèche α_1 et le sommet x . Ainsi, T_A est un arbre maximal de Q_A . En outre, soient F_A et K_A comme précédemment. Avec ces notations, nous avons $\pi_1(Q_B, I_\mu) \simeq F_B/K_B$, $\pi_1(Q_A, I_\nu) \simeq F_A/K_A$, et le morphisme $i_* : F_B/K_B \rightarrow F_A/K_A$ est donné par $\alpha K_B \mapsto \alpha K_A$.

Considérons l'application $p : F_A/K_A \rightarrow L_{t-1}$ définie par :

$$p(\alpha K_A) = \begin{cases} a_i & \text{si } \alpha \approx \alpha_i \text{ pour } i \in \{2, \dots, t\} \\ \varepsilon & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous prétendons que (L_{t-1}, p) est le conoyau de i_* .

Tout d'abord, notons que la composition pi_* est définie sans aucune ambiguïté, et que $pi_* = 1$. Vérifions maintenant que p est correctement définie sur F_A/K_A . Il est immédiat de vérifier que si α est une flèche de T_A , alors nous avons $p(\alpha K_A) = \varepsilon$. Par ailleurs, supposons que $\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_r$ et $\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_s$ sont deux chemins non nuls et homotopes dans (Q_A, I_ν) . Si leur source commune n'était pas le point d'extension x , alors il s'agirait de deux chemins non nuls homotopes dans (Q_B, I_μ) , et nous aurions

$$p(\beta_1 \cdots \beta_r K_A) = pi_*(\beta_1 \cdots \beta_r K_B) = \varepsilon = p(\gamma_1 \cdots \gamma_s K_A).$$

Si au contraire, leur source est le point x , alors nous avons $\beta_1, \gamma_1 \in x^+$, et nous pouvons supposer sans perte de généralité que ces deux flèches sont les débuts de deux chemins apparaissant dans la même relation minimale. Ainsi, $[\beta_1]_\nu = [\gamma_1]_\nu = a_{i_0}$, pour un certain indice $i_0 \in \{1, \dots, t\}$. Alors, nous avons :

$$\begin{aligned} p(\beta_1\beta_2 \cdots \beta_r K_A) &= p(\beta_1 K_A) p i_* (\beta_2 \cdots \beta_r K_B) \\ &= a_{i_0} p i_* (\beta_2 \cdots \beta_r K_B) \\ &= a_{i_0} p i_* (\gamma_2 \cdots \gamma_r K_B) \\ &= p(\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_s K_A) \end{aligned}$$

Ceci montre que p est correctement définie.

Supposons maintenant que l'on ait un homomorphisme de groupes $p' : F_A/K_A \rightarrow G$ tel que $p' i_* = 1$. Posons alors $\bar{p} : L_{t-1} \rightarrow G$ défini par $a_i \mapsto p'(\alpha K_A)$, où $[\alpha]_\nu = a_i$. Montrons tout d'abord que $\bar{p}(a_i)$ ne dépend pas du choix du représentant α_i . Si nous avons $[\beta]_\nu = [\gamma]_\nu$, nous pouvons supposer qu'il existe deux chemins $\beta\beta_2 \cdots \beta_r$ et $\gamma\gamma_2 \cdots \gamma_s$ dans Q_A apparaissant dans la même relation minimale. Mais alors

$$\begin{aligned} p'(\beta K_A) &= p'(\beta K_A) p' i_* (\beta_2 \cdots \beta_r K_B) \\ &= p'(\beta\beta_2 \cdots \beta_r K_A) \\ &= p'(\gamma\gamma_2 \cdots \gamma_s K_A) \\ &= p'(\gamma K_A) p' i_* (\gamma_2 \cdots \gamma_s K_B) \\ &= p'(\gamma K_A) \end{aligned}$$

Ainsi, \bar{p} est correctement définie, et il est aisé de vérifier que $\bar{p}p = p'$, et que le morphisme \bar{p} est uniquement déterminé. □

Corollaire 3.2.8 (Assem - de la Peña [4], voir aussi Skowroński [58]) *Soient B une algèbre simplement connexe, et M un B -module indécomposable. Alors l'algèbre $A = B[M]$ est simplement connexe.*

Démonstration : Soit (Q_A, I_ν) une présentation de A . Par restriction, nous obtenons une présentation (Q_B, I_μ) de l'algèbre B qui est simplement connexe. Le module M étant indécomposable, nous avons $t(\nu) = 1$. En vertu du résultat précédent, nous avons une suite exacte dans la catégorie des groupes, $\mathcal{G}r$.

$$\pi_1(Q_B, I_\mu) \xrightarrow{\pi_1(i)} \pi_1(Q_A, I_\nu) \longrightarrow 1$$

La conclusion suit. □

Dans le même esprit, nous pouvons donner une preuve du résultat suivant (voir [3]).

Corollaire 3.2.9 *Soient B une algèbre simplement connexe, M un B -module et $A = B[M]$. Alors, pour toute présentation (Q_A, I_ν) de A , le groupe fondamental $\pi_1(Q_A, I_\nu)$ est libre.*

Démonstration : Soit (Q_A, I_ν) une présentation de A . Comme précédemment, nous obtenons une présentation (Q_B, I_μ) de B par restriction de (Q_A, I_ν) . L'algèbre B étant simplement connexe, le groupe fondamental $\pi_1(Q_B, I_\mu)$ est trivial. En vertu de la proposition précédente, nous avons une suite exacte dans $\mathcal{G}r$.

$$1 \longrightarrow \pi_1(Q_A, I_\nu) \longrightarrow \prod_{i=1}^{t(\mu)-1} \mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

et la conclusion suit. □

Le théorème 3.2.3 permet d'obtenir des preuves courtes de certains résultats concernant la connexité simple des algèbres d'incidence grâce à des résultats bien connus de topologie algébrique.

Rappelons que, étant donné un complexe simplicial fini K , et un sommet x_0 qui n'est pas un sommet de K , le **cône de K sur x_0** , noté $x_0 * K$, est le complexe simplicial obtenu de la façon suivante : les sommets de $x_0 * K$ sont les sommets de K avec en plus le sommet x_0 . Les i -simplexes de $x_0 * K$ sont les i -simplexes de K avec en plus les simplexes de la forme $\{y_0, y_1, \dots, y_{i-1}, x_0\}$ où $\{y_0, y_1, \dots, y_{i-1}\}$ est un $(i-1)$ -simplexe de K . Un cône est un espace topologique contractile, donc en particulier simplement connexe (voir [55], par exemple).

Proposition 3.2.10 *Soit (E, \leq) un ensemble ordonné fini. S'il existe un élément $x_0 \in E$ tel que pour tout élément $y \in E$ on ait $x_0 \leq y$ ou $x_0 \geq y$, alors l'algèbre d'incidence $k(E)$ est simplement connexe.*

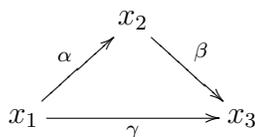
Démonstration : Soit $E' = E \setminus \{x_0\}$. Nous montrons que l'espace $\mathcal{B}(E)$ est le cône de $\mathcal{B}(E')$ avec sommet x_0 . En effet, si $\{y_0, y_1, \dots, y_i\}$ est une chaîne de E' , alors c'est aussi une chaîne de E . Par ailleurs, si $\{y_0, y_1, \dots, y_{i-1}\}$ est une chaîne de E' , on peut supposer sans perte de généralité que $y_0 < y_1 < \dots < y_{i-1}$. L'élément x_0 étant comparable à tous les éléments de E , nous avons que : soit $x_0 < y_0$, soit $y_{i-1} < x_0$, soit il existe $j \in \{0, 1, \dots, i-2\}$

tel que $y_j < x_0 < y_{j+1}$. Dans tous les cas, nous avons que $\{y_0, y_1, \dots, y_{i-1}, x_0\}$ est une chaîne de E . Le résultat suit alors du théorème 3.2.3.

□

Remarque 3.2.11 Dans la situation précédente, nous avons que pour chaque $y \in E$, $\dim_k k(E)(x_0, y) = 1$ ou bien $\dim_k k(E)(y, x_0) = 1$. On pourrait être porté à penser que le résultat précédent se généralise aux algèbres schuriennes presque triangulaires A en remplaçant l'existence d'un point x_0 comparable avec tous les autres dans E , par une condition analogue portant les dimensions des espaces vectoriels $A(x_0, y)$ ou $A(y, x_0)$. Cependant, ce n'est pas le cas comme le montre l'exemple suivant.

Soit $A = kQ/I$, où Q est le carquois



et $I = \langle \alpha\beta \rangle$. Notons que cette algèbre est contrainte. Nous avons $\dim_k A(x_1, x_2) = \dim_k A(x_1, x_3) = 1$. Cependant, nous avons $\pi_1(Q, I) = \mathbb{Z}$ et donc A n'est pas simplement connexe.

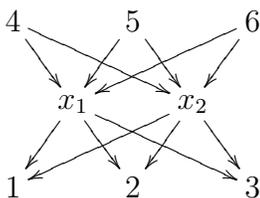
Dans la même veine que le résultat précédent, nous avons:

Proposition 3.2.12 Soit (E, \leq) un ensemble ordonné. S'il existe deux éléments x_1, x_2 de E tels que pour tout $y \in E \setminus \{x_1, x_2\}$ on ait $y \leq x_1$ ou $y \geq x_1$, et $y \leq x_2$ ou $y \geq x_2$, avec l'ensemble $E \setminus \{x_1, x_2\}$ connexe, et les points x_1 et x_2 non comparables, alors l'algèbre d'incidence $k(E)$ est simplement connexe.

Démonstration : Dans ce cas, l'espace $\mathcal{B}(E)$ est la suspension de $\mathcal{B}(E \setminus \{x_1, x_2\})$ qui est un espace connexe. La conclusion suit alors du théorème 3.2.3.

□

Exemple 3.2.13



Les points x_1 et x_2 vérifient l'hypothèse de la proposition précédente, de sorte que l'algèbre d'incidence $A = k(E)$ est simplement connexe. Par ailleurs, notons que $E \setminus \{x_1, x_2\}$ est connexe, mais l'algèbre d'incidence correspondante n'est pas simplement connexe.

Comme les deux résultats précédents le montrent bien, le calcul du groupe fondamental d'un carquois lié se réduit, en vertu du théorème 3.2.3, au calcul du groupe fondamental d'un espace topologique. Un des outils les plus intéressants en vue de ce genre de calculs est le théorème de Seifert et Van-Kampen (voir [55], par exemple). En utilisant l'isomorphisme du théorème 3.2.3, nous pouvons établir une version du résultat mentionné ci-haut dans le contexte des carquois liés.

Étant donné un carquois lié (Q, I) , et un sous carquois plein et convexe Q^i de Q , soit $I^i = I \cap kQ^i$, c'est à dire la restriction de I à Q^i .

Théorème 3.2.14 *Soient (Q, I) un carquois lié, Q^1 et Q^2 deux sous-carquois pleins et convexes tels que tout chemin non nul de Q est dans Q^1 ou dans Q^2 , et $Q^0 = Q^1 \cap Q^2$ est connexe. Alors, $\pi_1(Q, I)$ est le produit fibré du diagramme suivant*

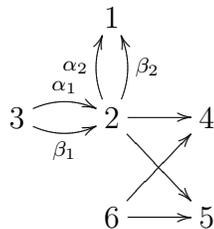
$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Q^0, I^0) & \longrightarrow & \pi_1(Q^2, I^2) \\ \downarrow & & \\ \pi_1(Q^1, I^1) & & \end{array}$$

où les flèches sont les morphismes induits par les inclusions.

Démonstration : Il suit des hypothèses faites au sujet de Q^1 et Q^2 que $\mathcal{B}(Q^1, I^1) \cup \mathcal{B}(Q^2, I^2) = \mathcal{B}(Q, I)$ et que $\mathcal{B}(Q^1, I^1) \cap \mathcal{B}(Q^2, I^2)$ est connexe. Le résultat suit alors du théorème 3.2.3 et du Théorème de Seifert - Van Kampen pour les espaces topologiques. \square

Mentionnons également que E. Reynaud a obtenu, dans [50] un résultat analogue.

Exemple 3.2.15 Soit Q le carquois



lié par $I = \langle \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2, \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 \rangle$, et soient Q^1 et Q^2 les sous-carquois pleins de Q engendrés par les sommets 2,3,4,5,6 et 1,2,3, respectivement. Un calcul immédiat donne $\pi_1(Q^1, I^1) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, $\pi_1(Q^2, I^2) = \mathbb{Z}_2$, et $\pi_1(Q^0, I^0) = \mathbb{Z}$, ce qui donne $\pi_1(Q, I) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$.

3.3 Revêtements

Comme nous l'avons vu avec l'exemple 2.4.3, la construction de l'espace classifiant d'un carquois lié n'est pas fonctorielle. Cependant, comme nous le verrons dans cette section, si au lieu de considérer la catégorie des carquois liés avec les morphismes de carquois liés, on considère la catégorie des carquois liés avec les morphismes de revêtement, cette lacune sera corrigée.

Nous ne nous étendrons pas sur l'utilité des techniques de revêtements en théorie des représentations des algèbres. Mentionnons simplement que celles-ci permettent souvent de ramener l'étude des représentations d'une algèbre A à celle des représentations d'une algèbre simplement connexe convenablement choisie A' , qu'on appelle le revêtement universel de A . Pour plus de détails à ce sujet, on renvoie le lecteur à [13, 28, 43], par exemple.

Avant de poursuivre, quelques rappels et définitions s'imposent.

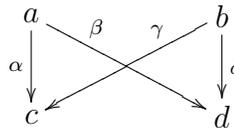
Étant donné un carquois lié (Q, I) et un point x de Q , rappelons que x^+ désigne l'ensemble des flèches de Q ayant x pour source. L'ensemble x^- est défini de façon duale.

Définition 3.3.1 *Un morphisme de carquois liés $p : (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ est un **morphisme de revêtement** si*

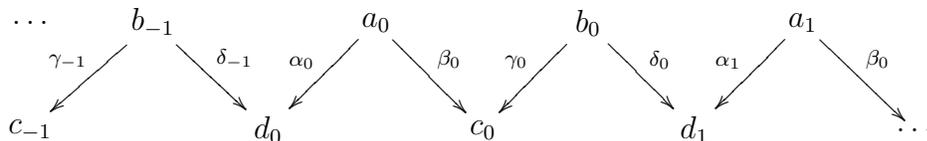
- a) *Pour tout point x de Q on a $p^{-1}(x) \neq \emptyset$;*
- b) *Pour tout point x de Q , et tout point $\hat{x} \in p^{-1}(x)$, p induit des bijections $x'^+ \rightarrow x^+$ et $x'^- \rightarrow x^-$;*
- c) *Pour tous $x, y \in Q_0$, pour toute relation $\rho \in I(x, y)$, et tout $x' \in p^{-1}(x)$ il existe $y' \in p^{-1}(y)$ et $\rho' \in I'(x', y')$ tel que $p(\rho') = \rho$.*

Exemples 3.3.2

- a) Soit Q le carquois suivant :



et Q'



Le morphisme $p : Q' \rightarrow Q$ donné par $x_i \mapsto x$ est un morphisme de revêtement. Dans cet exemple, la condition c) est trivialement vérifiée, vu que l'idéal I est nul.

b) Considérons Q ,

$$\begin{array}{c} x_2 \\ \alpha_2 \downarrow \beta_2 \\ x_1 \\ \alpha_1 \downarrow \beta_1 \\ x_0 \end{array}$$

lié par l'idéal $I = \langle \alpha_2\alpha_1 - \beta_2\beta_1, \alpha_2\beta_1 - \beta_2\alpha_1 \rangle$. Par ailleurs, soit Q' le carquois

$$\begin{array}{ccc} x_{02} & & x_{12} \\ \alpha_{02} \downarrow & \beta_{02} \searrow & \beta_{12} \swarrow \\ & x_{01} & & x_{11} \\ \alpha_{01} \downarrow & \beta_{01} \searrow & \beta_{11} \swarrow & \alpha_{11} \downarrow \\ & x_{00} & & x_{10} \end{array}$$

lié par l'idéal I' engendré par toutes les relations de commutativité possibles. Le morphisme $p : (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ donné par $p(x_{ij}) = x_j$, et $p(\alpha_{ij}) = \alpha_j, p(\beta_{ij}) = \beta_j$ pour les points x_{ij} et les flèches γ_{ij} de Q' , est un morphisme de revêtement.

Remarque 3.3.3 Les conditions b) et c) de la définition des morphismes de revêtement nous assurent que ceux-ci se comportent bien en ce qui concerne la relation d'homotopie. Notamment, il est facile de voir que pour tous $x, y \in Q_0$, et tout chemin de x à y , il existe $x' \in p^{-1}(x), y' \in p^{-1}(y)$ et un chemin w' de x' vers y' dans Q' tel que $p(w') = w$. Qui plus est, dans cette situation, il y a bijection entre l'ensemble des chemins joignant x à y dans Q , et l'ensemble des chemins joignant x' à y' dans Q' . En fait, nous avons un résultat plus fort.

Lemme 3.3.4 Soient $p : (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ un revêtement de carquois liés, x un sommet de Q , et w_1, w_2 deux chemins ayant x comme source. En outre, soient $x' \in p^{-1}(x)$ et w'_1, w'_2 deux chemins ayant x' pour source et tels que $p(w'_i) = w_i$, pour $i \in \{1, 2\}$. Alors, $w_1 \wedge w_2$ dans (Q, I) si et seulement si $w'_1 \wedge w'_2$ dans (Q', I') .

Démonstration : Soient $w_1 = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_r$ et $w_2 = \beta_1\beta_2 \cdots \beta_s$ deux chemins naturellement homotopes de source x dans (Q, I) . Nous pouvons supposer sans perte de généralité qu'ils apparaissent dans une relation minimale $\rho = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$. Soit $x' \in p^{-1}(x)$. Étant donné que p est un morphisme de revêtement, il existe une relation $\rho' = \sum_{i=1}^n \lambda_i w'_i$, ayant comme source x' et telle que $p(\rho') = \rho$. Si ρ' n'est pas une relation minimale, il existe un sous-ensemble propre $J \subset \{1, \dots, n\}$ tel que $\sum_J \lambda_i w'_i \in I'$. Comme p est un morphisme de

carquois liés, ceci entraîne que $p(\sum_J \lambda_i w'_i) = \sum_J \lambda_i w_i \in I$, ce qui contredit la minimalité de ρ . Ainsi, ρ' est minimale, et $w'_1 \wedge w'_2$.

Réciproquement, supposons que $w'_1 \wedge w'_2$ sont deux chemins homotopes dans (Q', I') qui ont pour source x' . Encore une fois, nous pouvons supposer que ces deux chemins apparaissent dans une relation minimale $\rho' = \sum_{i=1}^n \lambda_i w'_i$. Soit $\rho = p(\rho') = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$. Si ρ n'est pas minimale, il existe un sous-ensemble propre $J \subset \{1, \dots, n\}$ tel que $\rho_1 = \sum_J \lambda_i w_i \in I$. Mais alors, en vertu de la condition c) de la définition de revêtement de carquois liés, il existe une relation ρ'_1 ayant x' comme source. En vertu de la remarque qui précède, $\rho'_1 = \sum_J \lambda_i w'_i \in I'$, et ceci contredit la minimalité de ρ' . \square

Lemme 3.3.5 *Soient $p : (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ un revêtement de carquois liés, et x_0 un sommet de Q . Alors, pour tout $x_0 \in p^{-1}(x_0)$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une bijection entre l'ensemble des n -cellules de \mathcal{B} ayant x_0 dans leur bord et l'ensemble des n -cellules de \mathcal{B}' ayant x_0 dans leur bord.*

Démonstration : Soient x_0 un sommet de Q , et x'_0 un point de la fibre $p^{-1}(x_0)$. Soient n un entier positif, et $(\widehat{\sigma}_1, \dots, \widehat{\sigma}_n)$ une n -cellule de \mathcal{B} ayant x_0 dans son bord. Ainsi, il existe un chemin non nul dans (Q, I)

$$v_0 \xrightarrow{\sigma_1} v_1 \xrightarrow{\sigma_2} \dots \quad v_{j-1} \xrightarrow{\sigma_j} v_j = x_0 \xrightarrow{\sigma_{j+1}} \dots \quad v_{n-1} \xrightarrow{\sigma_n} v_n$$

Étant donné que p est un revêtement, il existe des sommets v'_i dans Q' tels que $v'_i = x'_0$ et $p(v'_i) = v_i$, et des chemins s_i joignant v_i à v_{i+1} . Il suit du lemme précédent que les classes \widehat{s}_i sont indépendantes des choix des représentants des classes $\widehat{\sigma}_i$. En outre, étant donné que p est un morphisme de carquois liés, et que $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \notin I$, nous avons que $s_1 s_2 \dots s_n \notin I'$, ce qui donne lieu à une cellule $(\widehat{s}_1, \widehat{s}_2, \dots, \widehat{s}_n)$ dans \mathcal{B}' .

Réciproquement, si $(\widehat{s}_1, \widehat{s}_2, \dots, \widehat{s}_n)$ est une n -cellule de \mathcal{B}' ayant x'_0 dans son bord, alors nous avons une n -cellule $(\widehat{p(s_1)}, \widehat{p(s_2)}, \dots, \widehat{p(s_n)}) = (\widehat{\sigma}_1, \widehat{\sigma}_2, \dots, \widehat{\sigma}_n)$ dans \mathcal{B} qui contient x_0 dans son bord. \square

À la lumière du dernier résultat, nous pouvons définir le morphisme $\mathcal{B}p : \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$ comme étant la fonction continue qui applique de façon homéomorphe la n -cellule $(\widehat{s}_1, \widehat{s}_2, \dots, \widehat{s}_n)$ sur la n -cellule $(\widehat{p(s_1)}, \widehat{p(s_2)}, \dots, \widehat{p(s_n)})$.

Un rappel de topologie algébrique s'impose avant de continuer (voir [55], par exemple).

Définition 3.3.6 *Soit X un espace topologique. Un revêtement de X est la donnée d'une paire (X', ϕ) où*

- a) X' est un espace topologique connexe par arcs;

- b) $\phi : X' \rightarrow X$ est une fonction continue ;
- c) Tout point x de X a un voisinage U_x tel que $\phi^{-1}(U_x) = \bigcup_{j \in J} U'_{xj}$ avec les U'_{xj} des ouverts disjoints tels que la restriction $\phi|_{U'} : U'_{xj} \rightarrow U_x$ est un homéomorphisme pour tout $j \in J$.

Forts de ces notions, nous pouvons énoncer le résultat suivant, qui vient tout naturellement.

Théorème 3.3.7 Avec les notations précédentes, la paire $(\mathcal{B}', \mathcal{B}p)$ est un revêtement de \mathcal{B} .

Démonstration : Étant donné que Q est connexe, il en est de même pour Q' , de sorte que \mathcal{B}' est connexe par arcs. D'autre part, il suit directement de la définition de $\mathcal{B}p$ qu'il s'agit d'une application continue. Ainsi, il reste seulement la troisième condition à vérifier. Mais cette vérification suit de ce que les cellules ouvertes de $\widehat{\mathcal{B}}$ sont disjointes et la restriction de $\mathcal{B}p$ à celles-ci est un homéomorphisme, par construction. □

Exemple 3.3.8 Considérons le carquois Q' suivant

$$\dots \longrightarrow a_{-1} \xrightarrow{\alpha_{-1}} b_{-1} \xrightarrow{\beta_{-1}} a_0 \xrightarrow{\alpha_0} b_0 \xrightarrow{\beta_0} a_1 \xrightarrow{\alpha_1} b_1 \xrightarrow{\beta_1} \dots$$

lié par l'idéal $I' = \langle \beta_i \alpha_{i+1} \mid i \in \mathbb{Z} \rangle$. Il s'agit d'un revêtement du carquois

$$\begin{array}{ccc} & \alpha & \\ & \curvearrowright & \\ 1 & & 2 \\ & \curvearrowleft & \\ & \beta & \end{array}$$

lié par l'idéal $I = \langle \beta \alpha \rangle$. L'espace classifiant \mathcal{B}' est

$$\begin{array}{cccccccc} & \widehat{\alpha_{-1}\beta_{-1}} & & \widehat{\alpha_0\beta_0} & & \widehat{\alpha_1\beta_1} & & \widehat{\alpha_2\beta_2} & & \\ & & & & & & & & & \\ b_{-2} & & \tilde{\alpha}_{-1}^\circ & b_{-1} & & \tilde{\alpha}_0^\circ & b_0 & & \tilde{\alpha}_1^\circ & b_1 & & \tilde{\alpha}_2^\circ & b_2 & & b_3 \\ & & a_{-1} & & \tilde{\beta}_{-1}^\circ & a_0 & & \tilde{\beta}_0^\circ & a_1 & & \tilde{\beta}_1^\circ & a_2 & & \tilde{\beta}_2^\circ & a_3 \end{array}$$

et il est aisé de voir qu'il s'agit d'un revêtement de $\mathcal{B}(Q, I)$, donné par le schéma de la figure de la page suivante.

Définition 3.3.9 Un revêtement de carquois liés $p : (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ est dit être un **revêtement Galoisien** donné par l'action d'un groupe G d'automorphismes de (Q', I') si en plus

- d) Pour tout g dans G on a que $pg = p$;

$$\begin{array}{ccc}
 & \widehat{\alpha\beta} & \\
 & & \\
 & b & \\
 \widehat{\alpha} & & \widehat{\beta} \\
 & a &
 \end{array}$$

- e) Pour tout sommet x et toute flèche α de Q on a $p^{-1}(x) = Gp^{-1}(x)$ et $p^{-1}(\alpha) = Gp^{-1}(\alpha)$;
 f) G agit fidèlement sur Q' .

De plus, dans la situation précédente, il existe un sous-groupe distingué H de $\pi_1(Q, I)$ tel que $\pi_1(\widehat{Q}, \widehat{I}) \simeq H$ et $\pi_1(Q, I)/H \simeq G$. On renvoie le lecteur à [24, 28], par exemple, pour avoir plus de détails au sujet des revêtements galoisiens des carquois liés et leur utilité.

Comme précédemment, un automorphisme g de (Q', I') induit une application de l'ensemble des chemins dans (Q', I') vers l'ensemble des chemins dans (Q, I) . Ceci nous permet de définir l'application cellulaire $\mathcal{B}g$ comme étant l'application continue qui applique de façon homéomorphe une n -cellule $(\widehat{\sigma}_1, \dots, \widehat{\sigma}_n)$ sur la cellule $(\widehat{g\sigma}_1, \dots, \widehat{g\sigma}_n)$. Qui plus est, il est immédiat de vérifier que $\mathcal{B}g\mathcal{B}p = \mathcal{B}p$, et que $\mathcal{B}g$ est un homéomorphisme d'inverse $\mathcal{B}(g^{-1})$. On remarquera notamment que la restriction de $\mathcal{B}g$ aux 0-cellules de \mathcal{B} est précisément g . Une conséquence immédiate de ceci est que si g_1 et g_2 sont deux automorphismes de (Q', I') avec $g_1 \neq g_2$, alors $\mathcal{B}g_1 \neq \mathcal{B}g_2$.

Par ailleurs, rappelons que lorsque (X', ϕ) est un revêtement de X , l'ensemble des homéomorphismes $\psi : X' \rightarrow X'$ tels que $\psi\phi = \phi$ est un groupe pour la composition des applications. On l'appelle le **groupe d'automorphismes du revêtement** (X', ϕ) , et on le note $\text{Cov}(X'/X)$. Ainsi, dans la situation qui nous intéresse, l'ensemble $\mathcal{B}G = \{\mathcal{B}g \mid g \in G\}$ est un sous-groupe de $\text{Cov}(\mathcal{B}'/\mathcal{B})$ qui est en fait isomorphe à G . Qui plus est, la condition e) de la définition précédente nous assure que $\mathcal{B}G$ agit transitivement sur la fibre de chaque sommet de Q .

D'autre part, si x_0 est un point de X et $x'_0 \in \phi^{-1}(x_0)$, la fonction ϕ induit un homomorphisme $\pi_1(\phi) : \pi_1(X', x'_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ qu'on note ϕ_* et qui a la propriété d'être toujours injectif (théorème 10.7, p 279 dans [55]). Dans le cas où $\text{Im } \phi_*$ est un sous-groupe distingué de $\pi_1(X, x_0)$, le revêtement (X', ϕ) est dit être un **revêtement régulier**. Il est bien connu (voir théorème 10.18, p 289 dans [55]) qu'un revêtement (X', ϕ) est régulier si et seulement si le groupe d'automorphismes $\text{Cov}(X'/X)$ agit transitivement sur la fibre de x_0 .

Cette discussion fournit en fait une partie de la preuve du théorème suivant.

Théorème 3.3.10 *Soit $p : (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ un revêtement galoisien donné par l'action d'un groupe G . Posons $\mathcal{B} = \mathcal{B}(Q, I)$, et $\mathcal{B}' = \mathcal{B}(Q', I')$. Alors, $(\mathcal{B}', \mathcal{B}p)$ est un revêtement*

régulier de \mathcal{B} et $\text{Cov}(\mathcal{B}'/\mathcal{B}) \simeq G$.

Démonstration : Fixons un sommet x_0 de Q , et un point x'_0 dans la fibre de x_0 . Ce seront les points de base par rapport auxquels les groupes fondamentaux seront considérés.

La régularité de $(\mathcal{B}', \mathcal{B}p)$ vient du fait que $\text{Cov}(\mathcal{B}'/\mathcal{B})$ a un sous-groupe, à savoir $\mathcal{B}G$, qui agit transitivement sur la fibre de x_0 .

Par ailleurs, nous avons

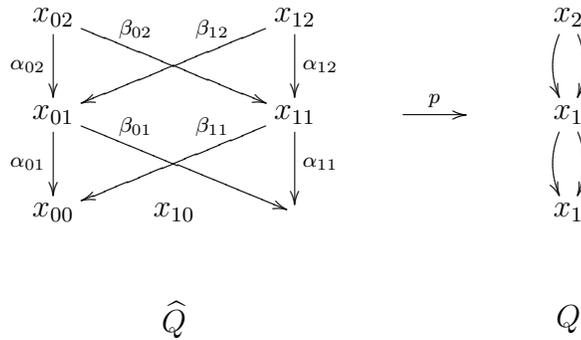
$$\text{Cov}(\mathcal{B}'/\mathcal{B}) \simeq \frac{\pi_1(\mathcal{B})}{(\mathcal{B}p)_*\pi_1(\mathcal{B}')} \simeq \frac{\pi_1(Q, I)}{\pi_1(Q', I')} \simeq G$$

où le premier isomorphisme est donné par le corollaire 10.28, p 294 dans [55].

□

Remarque 3.3.11 Une remarque importante est que nous n'avons jamais utilisé la condition f) de la définition de revêtement galoisien. En fait, si (X', ϕ) est un revêtement régulier de X , et h est un élément de $\text{Cov}(X'/X)$, alors h agit sans points fixes sur X' (théorème 10.19, p 129 dans [55]). Ainsi, la condition f) découle des autres.

Exemple 3.3.12 Considérons les carquois liés (Q', I') et (Q, I) de l'exemple 3.3.2 b)



L'espace \mathcal{B}' est homéomorphe à S^2 , et \mathcal{B} est homéomorphe à $\mathbb{R}P^2$, le plan projectif réel. L'application $\mathcal{B}p$ identifie les points antipodaux de S^2 . Il est bien connu que $(S^2, \mathcal{B}p)$ est un revêtement de $\mathbb{R}P^2$. Dans ce cas, le revêtement p est donné par le groupe d'automorphismes G de (Q', I') engendré par l'élément d'ordre 2 défini par:

$$g(x_{ij}) = \begin{cases} x_{0j} & \text{si } i = 1, \\ x_{1j} & \text{si } i = 0. \end{cases} \quad \text{et} \quad g(\alpha_{ij}) = \begin{cases} \alpha_{0j} & \text{si } i = 1, \\ \alpha_{1j} & \text{si } i = 0. \end{cases}$$

Chapitre 4

HOMOLOGIE

Dans ce chapitre, nous étudions l'homologie et la cohomologie. Celle de l'espace $\mathcal{B}(Q,I)$ dans un premier temps. Dans la deuxième section, nous nous intéressons à l'homologie et à la cohomologie simpliciales d'une algèbre. Nous commençons par présenter les détails et la généralisation au cas non-schurien de cette notion ébauchée au chapitre 2. Naturellement, nous comparons les groupes d'homologie et de cohomologie simpliciales d'une algèbre à ceux de l'espace $\mathcal{B}(Q,I)$: le corollaire 4.2.8 nous dit qu'ils sont isomorphes. Ceci permet, par analogie avec des résultats de topologie algébrique, d'obtenir des outils de calcul pour les groupes d'homologie et cohomologie simpliciales des algèbres.

4.1 Homologie et Cohomologie de $\mathcal{B}(Q,I)$

La construction de $\mathcal{B} = \mathcal{B}(Q,I)$ en rattachant des cellules à un CW-complexe construit préalablement, fournit une filtration cellulaire canonique de celui-là.

Pour $n \geq 0$, notons \mathcal{B}^n le sous-complexe de $\mathcal{B}(Q,I)$ dont les cellules sont les cellules de dimension inférieure ou égale à n . On appelle \mathcal{B}^n le $n^{\text{ième}}$ **squelette de \mathcal{B}** . Ainsi, si la longueur maximale des chemins non nuls dans (Q,I) est m , nous avons une filtration de \mathcal{B} :

$$\mathcal{B}^0 = \mathcal{B}^0 \subset \mathcal{B}^1 \subset \dots \subset \mathcal{B}^{m-1} \subset \mathcal{B}^m = \mathcal{B}(Q,I)$$

Les groupes d'homologie relative $H_i(\mathcal{B}^n, \mathcal{B}^{n-1})$ sont nuls pour $i \neq n$, et ce sont des groupes abéliens libres non nuls si $i = n$. Plus précisément, dans ce cas, une base de $H_n(\mathcal{B}^n, \mathcal{B}^{n-1})$ est (en bijection avec) \mathcal{C}_n , l'ensemble des cellules de dimension n de \mathcal{B} (voir théorème 39.3, p.224 dans [47]). Ceci permet de décrire explicitement les groupes

d'homologie de \mathcal{B} . Soit $(C_\bullet(\mathcal{B}),\delta)$ le complexe défini par $C_n(\mathcal{B}) = H_n(\mathcal{B}^n, \mathcal{B}^{n-1})$, et dont la différentielle $\delta_n : C_n(\mathcal{B}) \rightarrow C_{n-1}(\mathcal{B})$ est définie sur un élément de base $\sigma = (\widehat{\sigma}_1, \dots, \widehat{\sigma}_n)$ par la règle

$$\delta_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial_i^n(\sigma)$$

Soit G un groupe abélien quelconque. Avec ces notations, le $i^{\text{ième}}$ groupe d'homologie de \mathcal{B} , à coefficients dans G qu'on notera $H_i(\mathcal{B}, G)$, est le $i^{\text{ième}}$ groupe d'homologie du complexe différentiel $(C_\bullet(\mathcal{B}, G), \delta_*)$ obtenu en appliquant le foncteur $-\otimes_{\mathbb{Z}} G$ à $(C_\bullet(\mathcal{B}), \delta)$. Si G est le groupe \mathbb{Z} , nous écrirons simplement $H_i(\mathcal{B})$.

Par ailleurs, les groupes de cohomologie de \mathcal{B} à coefficients dans G sont les groupes de cohomologie du complexe $(C^\bullet(\mathcal{B}, G), \delta^*)$ obtenu en appliquant le foncteur $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, G)$ à $(C_\bullet(\mathcal{B}), \delta)$, et on les note $H^i(\mathcal{B}, G)$.

Il existe un lien étroit entre les groupes d'homologie (à coefficients entiers) d'un espace topologique et les groupes d'homologie et de cohomologie avec coefficients dans un groupe abélien quelconque. Celui-ci s'inscrit dans le cadre de résultats généraux d'algèbre homologique connus sous le nom de "théorèmes de coefficients universels" (voir p.230 - 286 dans [54], par exemple).

Théorème 4.1.1 *Soient A un anneau commutatif héréditaire, M un A -module quelconque, et (C_\bullet, d_\bullet) un complexe différentiel de A -modules projectifs. Alors, il existe des suites exactes courtes scindées de A -modules*

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \text{Ext}_A^1(H_{n-1}(C_\bullet), M) \longrightarrow H^n(\text{Hom}_A(C_\bullet, M)) \longrightarrow \text{Hom}_A(H_n(C_\bullet), M) \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow H_n(C_\bullet) \otimes_A M \longrightarrow H_n(C_\bullet \otimes_A M) \longrightarrow \text{Tor}_1^A(H_{n-1}(C_\bullet), M) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

□

Notamment, nous nous intéresserons au cas où $A = \mathbb{Z}$.

Par ailleurs, dans le cas où les coefficients sont choisis dans un anneau associatif R , il est possible de donner une structure d'anneau gradué au groupe $H^*(\mathcal{B}, R) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H^i(\mathcal{B}, R)$. L'opération qui permet de faire ceci est définie au niveau du complexe $(C^\bullet(\mathcal{B}, R), \delta^*)$.

Définition 4.1.2 *Soient f^p et g^q des éléments de $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_p(\mathcal{B}), R)$ et $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_q(\mathcal{B}), R)$, respectivement. Le **cup-produit** de f^p et g^q , qu'on note $f^p \smile g^q$, est l'élément de $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_{p+q}(\mathcal{B}), R)$ défini par*

$$(f^p \smile g^q)(\widehat{\sigma}_1, \dots, \widehat{\sigma}_p, \widehat{\sigma}_{p+1}, \dots, \widehat{\sigma}_{p+q}) = f^p(\widehat{\sigma}_1, \dots, \widehat{\sigma}_p) g^q(\widehat{\sigma}_{p+1}, \dots, \widehat{\sigma}_{p+q}).$$

L'associativité et la bilinéarité du produit se vérifient aisément. Qui plus est, la chaîne constante z^0 qui prend la valeur 1_R est un élément neutre pour cette opération. En outre, avec les notations précédentes, on vérifie sans peine (voir Théorème 48.1, p.288 dans [47]) que

$$\delta^{p+q+1}(f^p \smile g^q) = (\delta^{p+1} f^p) \smile g^q + (-1)^p f^p \smile (\delta^{q+1} g^q).$$

Une conséquence immédiate de ceci est que \smile définit une opération au niveau de la cohomologie $H^*(\mathcal{B},R)$.

Théorème 4.1.3 *L'opération induite par le cup-produit fait de $H^*(\mathcal{B},R)$ un anneau associatif gradué par les entiers naturels, unifère, et anti-commutatif, c'est à dire que pour $\phi^p \in H^p(\mathcal{B},R)$ et $\xi^q \in H^q(\mathcal{B},R)$, nous avons $\phi^p \smile \xi^q = (-1)^{pq} \xi^q \smile \phi^p$.*

□

L'anneau $H^*(\mathcal{B},R)$ est l'**anneau de cohomologie de \mathcal{B} à coefficients dans R** . L'intérêt des anneaux de cohomologie des espaces topologiques réside dans le fait bien connu qu'ils permettent d'obtenir bien plus d'information concernant l'espace considéré que la seule connaissance des groupes d'homologie $\{H^i(\mathcal{B},R)\}_{i \geq 0}$. En effet, il existe des espaces topologiques ayant mêmes groupes de cohomologie, mais dont les anneaux de cohomologie sont non-isomorphes. On pourra consulter [55, 47], par exemple.

Par ailleurs, les groupes d'homologie d'un espace topologique X sont aussi reliés aux groupes d'homotopie de X . Notamment, nous rappelons le théorème suivant, connu sous le nom de théorème de Hurewicz - Poincaré (théorème 4.29 dans [55]).

Théorème 4.1.4 (Hurewicz - Poincaré) *Soit X un espace topologique connexe par arcs. Alors il existe un isomorphisme*

$$H_1(X) \simeq \frac{\pi_1(X)}{[\pi_1(X), \pi_1(X)]}.$$

où $[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ désigne le groupe dérivé de $\pi_1(X)$.

Désignons par $\mathcal{G}r$ la catégorie des groupes. Une conséquence immédiate du théorème précédent est que pour tout groupe abélien G , nous avons un isomorphisme

$$\text{Hom}_{\mathcal{G}r}(\pi_1(X), G) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(X), G).$$

4.2 Homologie Simpliciale d'Algèbres

Dans cette section, nous revenons sur les détails concernant les groupes d'homologie et de cohomologie simpliciales des algèbres $A = kQ/I$ que nous avons introduit au chapitre 2. Notamment, nous présentons la généralisation de cette construction au contexte des algèbres non nécessairement schuriennes qui a été faite dans [44] (voir aussi [42]). Nous verrons par la suite les liens existant entre ces groupes et les groupes d'homologie et cohomologie de l'espace classifiant $\mathcal{B}(Q,I)$.

Étant donnée une présentation (Q,I) d'une algèbre A , nous savons que le k -espace vectoriel sous-jacent à A a une base donnée par les classes $\bar{w} = w + I$ des chemins de Q modulo l'idéal I . Cependant, A a aussi une multiplication interne et, *a priori*, aucun renseignement concernant le comportement des vecteurs de base par rapport à la multiplication n'est disponible. En particulier, il n'y a aucune raison de penser que le produit de deux vecteurs de base en est un autre. En fait, c'est généralement faux. Ceci nous mène à la définition suivante.

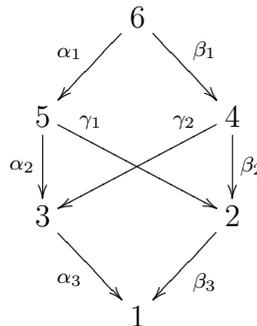
Définition 4.2.1 *Soit $A = kQ/I$ une algèbre. Pour toute paire (i,j) de sommets de Q , soit B_{ij} une base du k -espace vectoriel $e_i A e_j$. Ainsi, l'ensemble $B = \cup_{i,j} B_{ij}$ est une base de A . La base B est dite être une **base semi-normée** si*

- a) Pour tout sommet i de Q , on a que $e_i \in B_{ii}$;
- b) Pour toute flèche $\alpha : i \rightarrow j$ de Q on a $\bar{\alpha} \in B_{ij}$;
- c) Si σ et σ' sont des éléments de B , alors $\sigma\sigma' = 0$ ou il existe un scalaire $\lambda_{\sigma,\sigma'}$ et un élément $b(\sigma,\sigma')$ de B tels que $\sigma\sigma' = \lambda_{\sigma,\sigma'} b(\sigma,\sigma')$.

Si en plus ceux des scalaires $\lambda_{\sigma,\sigma'}$ qui sont non nuls sont tous égaux à 1, on dit que la base B est une **base multiplicative**.

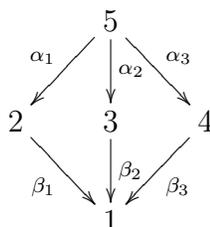
Exemples 4.2.2

- a) Soient Q le carquois



et $I = \langle \alpha_1\gamma_1 - \beta_1\beta_2, \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\gamma_2, \alpha_2\alpha_3 - \delta_1\beta_3, \gamma_2\alpha_3 - \lambda\beta_2\beta_3 \rangle$ avec $\lambda \in k \setminus \{0,1\}$ (voir [11]). La base B formée par les classes des chemins modulo I est une base semi-normée qui n'est pas une base multiplicative. Notons aussi que les relations impliquent tous les chemins de longueur 3 se trouvent dans I .

b) Soit Q le carquois



lié par l'idéal $I = \langle \sum_{i=1}^3 \alpha_i\beta_i \rangle$. Alors la base canonique B formée par les classes modulo I des chemins n'est pas une base semi normée. En effet, nous avons $B = \{e_1, e_2, e_3, \overline{\alpha_1}, \overline{\beta_1}, \overline{\alpha_2}, \overline{\beta_2}, \overline{\alpha_3}, \overline{\beta_3}, \overline{\alpha_1\beta_1}, \overline{\alpha_2\beta_2}\}$. Ainsi, bien que $\overline{\alpha_3}$ et $\overline{\beta_3}$ se trouvent dans B , nous avons $\overline{\alpha_3\beta_3} = -(\overline{\alpha_1\beta_1} + \overline{\alpha_2\beta_2})$.

La notion de base semi-normée permet de définir, comme dans [43, 42], les groupes d'homologie et de cohomologie simpliciales d'une algèbre de la façon suivante : soit A une algèbre ayant une base semi-normée B . On considère le complexe de groupes abéliens $(SC_\bullet(A), d)$ défini comme suit : $SC_{-1}(A) = 0$, $SC_0(A)$ et $SC_1(A)$ sont les groupes abéliens libres ayant comme bases Q_0 et B , respectivement. Pour $n \geq 2$, $SC_n(A)$ est le groupe abélien libre ayant comme base l'ensemble des n -tuplets $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ de B^n tels que $\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n \neq 0$ et $\sigma_i \neq e_x$ pour tout i et tout sommet x de Q . La différentielle $d_n : SC_n(A) \rightarrow SC_{n-1}(A)$ est définie sur les éléments des bases des groupes $SC_n(A)$ par la règle $d_1(\sigma) = y - x$ lorsque $\sigma \in B_{xy}$, et, pour $n \geq 1$, par

$$\begin{aligned} d_n(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) &= (\sigma_2, \dots, \sigma_n) \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j (\sigma_1, \dots, b(\sigma_j, \sigma_{j+1}), \dots, \sigma_n) \\ &+ (-1)^n (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) \end{aligned}$$

où $b(\sigma_j, \sigma_{j+1})$ est comme dans la définition de base semi-normée.

Le $n^{ième}$ **groupe d'homologie simpliciale de A** par rapport à la base semi normée B est défini comme étant le $n^{ième}$ groupe d'homologie du complexe $(SC_\bullet(A), d)$, et on le note $SH_n(A)$. Tout naturellement, si G est un groupe abélien, $(SC^\bullet(A, G), d^*)$ est le complexe obtenu en appliquant le foncteur $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, G)$ à $(SC_\bullet(A), d)$. Le $n^{ième}$ **groupe de cohomologie simpliciale de A avec coefficients dans G** est, par définition, le groupe de cohomologie de $(SC^\bullet(A, G), d^*)$, et noté $SH^n(A, G)$.

Une première remarque est que les groupes d'homologie et de cohomologie simpliciale d'une algèbre $A = kQ/I$ sont définis seulement lorsque cette dernière a une base semi-normée. Or, nous avons vu qu'il existe des algèbres n'ayant pas de telles bases. Cependant, il a été montré (voir section 1.3 dans [42]) que lorsque le revêtement universel de (Q, I) est schurien, alors l'algèbre A admet une base semi-normée. Une conséquence immédiate de ceci est que toute algèbre schurienne, ainsi que toute algèbre monomiale admet une base semi-normée. Par ailleurs, il a été montré dans [10] que toute algèbre de représentation finie admettent une base multiplicative. Ainsi, les groupes d'homologie et de cohomologie simpliciales sont définis pour une vaste classe d'algèbres.

Une deuxième remarque est que même si une algèbre A admet une base semi-normée B , celle-ci n'est généralement pas unique. Étant donné que les groupes $SC_n(A)$ dépendent fortement du comportement de B par rapport à l'idéal I , il est naturel de penser que les groupes $SH_i(A)$ et $SH^i(A, G)$ dépendent de la présentation de A , tout comme le groupe fondamental d'ailleurs. L'exemple suivant qu'on comparera avec l'exemple 1.4.2 b), illustre ce fait :

Exemple 4.2.3 Soit Q le carquois

$$3 \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\gamma} \end{array} 2 \xrightarrow{\alpha} 1$$

Considérons $I_1 = \langle \beta\alpha \rangle$, et l'algèbre $A_1 = kQ/I_1$. Cette présentation de A_1 donne lieu à une base semi-normée $B_1 = \{e_1, e_2, e_3, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\gamma}\bar{\alpha}\}$. Ainsi, une base de $SC_2(A_1)$ est réduite au seul élément $(\bar{\gamma}, \bar{\alpha})$, et un calcul immédiat mène à $SH_1(A_1) = \mathbb{Z}$. Remarquons que $\pi_1(Q, I_1) = \mathbb{Z}$.

Par ailleurs, considérons l'idéal $I_2 = \langle (\beta - \gamma)\alpha \rangle$, et l'algèbre $A_2 = kQ/I_2$. Nous avons vu à l'exemple 1.4.2 b) que $A_1 \simeq A_2$. Avec cette présentation, nous avons une base semi-normée $B_2 = \{e_1, e_2, e_3, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\gamma}\bar{\alpha}\}$. Cependant, dans ce cas, le groupe $SC_2(A_2)$ a pour base l'ensemble $\{(\bar{\gamma}, \bar{\alpha}), (\bar{\beta}, \bar{\alpha})\}$, et ceci mène à $SH_1(A_2) = 0$. Par ailleurs, nous avons $\pi_1(Q, I_2) = 1$.

Ainsi, tout comme les groupes fondamentaux, les groupes d'homologie et de cohomologie simpliciales ne sont pas des invariants de l'algèbre. Une question naturelle serait alors d'essayer de comparer les groupes d'homologie simpliciale d'une algèbre $A = kQ/I$ ayant une base semi-normée avec les groupes d'homologie et de cohomologie de l'espace classifiant $\mathcal{B}(Q, I)$. Un premier résultat dans cette direction est la proposition suivante (voir aussi [42]).

Proposition 4.2.4 Soit $A = kQ/I$ une algèbre schurienne, et $\mathcal{B} = \mathcal{B}(Q,I)$ l'espace classifiant du carquois lié (Q,I) . Alors, pour chaque $i \geq 0$, il existe des isomorphismes de groupes abéliens

- a) $H_i(\mathcal{B}) \simeq SH_i(A)$;
- b) $H^i(\mathcal{B},G) \simeq SH^i(A,G)$ pour tout groupe abélien G .

Démonstration : Soit $\sigma \in B_{xy}$ un élément de la base semi-normée. En particulier, étant donnée que A est schurienne, ceci entraîne que $e_x A e_y \simeq k$, de sorte qu'il existe un chemin $w : x \rightsquigarrow y$ qui n'est pas dans I . Comme dans 2.3.3, si $w' : x \rightsquigarrow y$ est un autre tel chemin, alors $w \wedge w'$ (en fait $w \sim w'$). Ceci permet d'identifier l'élément σ de B_{xy} à la cellule \widehat{w} de $\mathcal{B}(Q,I)$. De la même façon, si $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ est un élément de la base de $SC_n(A)$, alors il existe des chemins w_1, \dots, w_n , uniques à homotopie naturelle près et tels que $w_1 \cdots w_n$ ne se trouve pas dans I . Ainsi, nous pouvons identifier $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ à la n -cellule $(\widehat{w}_1, \dots, \widehat{w}_n)$ de $\mathcal{B}(Q,I)$.

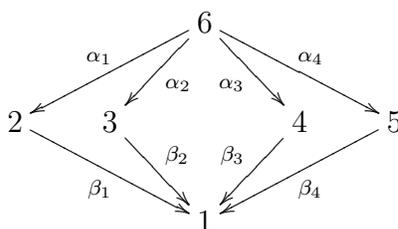
Réciproquement, si \widehat{w}_1 est la classe d'un chemin non nul, disons de x vers y , alors, étant donné que A est schurienne, il existe un vecteur $\sigma \in B_{xy}$ tel que $w + I \in \langle \sigma \rangle$. Ainsi, il est possible d'identifier la cellule correspondant à la classe du chemin \widehat{w} au vecteur de base σ . Il est clair que cette identification s'étend aisément aux cellules de dimension supérieure.

Finalement, observons que ces correspondances induisent des morphismes de complexes mutuellement inverses

$$C_\bullet(\mathcal{B},\delta) \begin{array}{c} \xrightarrow{\phi} \\ \xleftarrow{\psi} \end{array} SC_\bullet(A,d)$$

et la conclusion suit. □

Exemple 4.2.5 Soit Q le carquois suivant



lié par l'idéal $I = \langle \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2, \alpha_3\beta_3 - \alpha_4\beta_4 \rangle$. L'algèbre $A = kQ/I$ n'est pas schurienne, mais nous avons que l'espace $\mathcal{B}(Q,I)$ a le type d'homotopie d'un cercle. En outre, nous avons les isomorphismes des groupes d'homologie

$$\mathrm{SH}_i(A) \simeq \mathrm{H}_i(\mathcal{B}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0, 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

À la lumière du résultat précédent et de l'exemple ci-haut, on pourrait se demander s'il existe des algèbres $A = kQ/I$ ayant une base semi-normée pour lesquelles les groupes d'homologie et de cohomologie simpliciale ne sont pas isomorphes aux groupes d'homologie et de cohomologie de l'espace classifiant $\mathcal{B}(Q, I)$. Nous verrons par la suite que la réponse à cette question est négative. Cependant, avant de continuer, nous avons besoin du lemme suivant qui est technique, et montre qu'il y a des liens étroits entre les vecteurs des bases semi-normées - lorsqu'elles existent - et la relation d'homotopie dans (Q, I) .

Lemme 4.2.6 *Soit $A = kQ/I$ une algèbre possédant une base semi normée B . Alors :*

- a) *Pour tout chemin w de Q tel que $w \notin I$, il existe un unique vecteur $b(w)$ de B et un unique scalaire non nul λ tels que $\overline{w} = \lambda b(w)$;*
- b) *Pour tout vecteur σ de B , il existe un chemin $c(\sigma)$ dans Q n'appartenant pas à I et un scalaire μ tels que $\sigma = \mu c(\sigma)$. En outre, si $c(\sigma)$ et $c'(\sigma)$ sont deux tels chemins, alors ils sont naturellement homotopes.*
- c) *Si w_1 et w_2 sont deux chemins naturellement homotopes n'appartenant pas à I , alors il existe un scalaire λ tel que $\overline{w_1} = \lambda \overline{w_2}$.*

Démonstration :

- a) Il s'agit là d'une récurrence sur le longueur $l(w)$ des chemins considérés. La condition b) de la définition de base semi-normée donne l'énoncé pour $l(w) = 1$, tandis que la condition c) permet de prouver l'étape de récurrence.
- b) Soient $\sigma \in B_{xy}$, et w_1, w_2, \dots, w_r les chemins de x vers y tels que $\{\overline{w_i} \mid 1 \leq i \leq r\}$ est une base de $e_x A e_y$. Supposons que $\sigma \notin \langle b(w_i) \rangle$ pour tout i dans $\{1, \dots, r\}$. D'après la partie a), il existe $\lambda_i \in k \setminus \{0\}$ et $b(w_i) \in B_{xy}$ tels $\overline{w_i} = \lambda_i b(w_i)$. Ainsi, $\{b(w_1), \dots, b(w_r)\}$ est une base de $e_x A e_y$ donc $\sigma = b(w_{i_0}) = \lambda_{i_0} w_{i_0}$ pour un indice i_0 tel que $1 \leq i_0 \leq r$. Par ailleurs, si $c(\sigma)$ et $c'(\sigma)$ sont des chemins distincts et μ, μ' des scalaires tels que $\sigma = \mu c(\sigma) = \mu' c'(\sigma)$ nous avons aussi

$$\overline{\mu c(\sigma)} - \overline{\mu' c'(\sigma)} = \sigma - \sigma = 0$$

et il s'agit d'une relation minimale, de sorte que $c(\sigma)$ et $c'(\sigma)$ sont naturellement homotopes.

- c) Soient w_1 et w_2 deux chemins parallèles naturellement homotopes, et supposons que $\overline{w_1}$ et $\overline{w_2}$ sont linéairement indépendants. Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que les chemins w_1 et w_2 apparaissent dans une même relation minimale $\rho = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$. Soit $\{\overline{w_1}, \overline{w_2}, \dots, \overline{w_r}\}$ un sous-ensemble de $\{\overline{w_1}, \overline{w_2}, \dots, \overline{w_n}\}$

linéairement indépendant et maximal pour cette propriété. Il est immédiat de remarquer que $2 \leq r \leq n$. L'algèbre A possédant une base semi-normée, nous avons que les \bar{w}_j , sont, à scalaire près, des vecteurs de la base B . Après re-arrangement si nécessaire, on peut supposer que

$$\begin{aligned} \{\bar{w}_{r+1}, \bar{w}_{r+2}, \dots, \bar{w}_{r+i_1}\} &\subset \langle \bar{w}_1 \rangle, \\ \{\bar{w}_{r+i_1+1}, \bar{w}_{r+i_1+2}, \dots, \bar{w}_{r+i_2}\} &\subset \langle \bar{w}_2 \rangle, \\ &\vdots \\ \{\bar{w}_{r+i_r+1}, \bar{w}_{r+i_r+2}, \dots, \bar{w}_n\} &\subset \langle \bar{w}_r \rangle \end{aligned}$$

c'est à dire qu'il existe des scalaires a_j tels que $\bar{w}_{r+1} = a_{r+1}\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{r+i_1} = a_{r+i_1}\bar{w}_1, \bar{w}_{r+i_1+1} = a_{r+i_1+1}\bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n = a_n\bar{w}_r$. En remplaçant dans la relation ρ , c'est à dire $\sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{w}_i = 0$, nous obtenons

$$\lambda_1 + \lambda_{r+1}a_{r+1} + \dots + \lambda_{r+i_1}a_{r+i_1} = 0$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \lambda_1 \bar{w}_1 + \lambda_{r+1} \bar{w}_{r+1} + \dots + \lambda_{r+i_1} \bar{w}_{r+i_1} &= \lambda_1 \bar{w}_1 + \lambda_{r+1} a_{r+1} \bar{w}_1 + \dots + \lambda_{r+i_1} a_{r+i_1} \bar{w}_1 \\ &= (\lambda_1 + \lambda_{r+1} a_{r+1} + \dots + \lambda_{r+i_1} a_{r+i_1}) \bar{w}_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui contredit la minimalité de ρ car w_2 n'apparaît pas dans cette dernière somme. □

Tel qu'annoncé, le lemme précédent nous permet d'établir le résultat principal de cette section.

Théorème 4.2.7 *Soit $A = kQ/I$ une algèbre ayant une base semi-normée B . Alors, il existe un isomorphisme de complexes $(C_\bullet(\mathcal{B}), \delta) \simeq (SC_\bullet(A), d)$.*

Démonstration : Il est évident que $C_0(\mathcal{B}) \simeq SC_0(A)$. Par ailleurs, pour $n \geq 1$, considérons les applications suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_n : SC_n(A) &\longrightarrow C_n(\mathcal{B}) \\ (\sigma_1, \dots, \sigma_n) &\longmapsto (\widehat{c(\sigma_1)}, \dots, \widehat{c(\sigma_n)}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \psi_n : C_n(\mathcal{B}) &\longrightarrow SC_n(A) \\ (\widehat{\sigma}_1, \dots, \widehat{\sigma}_n) &\longmapsto (b(\sigma_1), \dots, b(\sigma_n)). \end{aligned}$$

Le fait que ψ_n est définie sans ambiguïté suit du troisième énoncé du lemme précédent. Par ailleurs, il est évident que les morphismes définis ci-haut commutent avec les différentielles des complexes concernés, de sorte que nous avons deux morphismes de complexes $\phi_\bullet : (SC_\bullet(A), d_\bullet) \rightarrow (C_\bullet(\mathcal{B}), \delta_\bullet)$ et $\psi_\bullet : (C_\bullet(\mathcal{B}), \delta_\bullet) \rightarrow (SC_\bullet(A), d_\bullet)$.

Finalement, étant donné un élément $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ de la base de $SC_n(A)$, nous avons

$$\begin{aligned} \psi_n \phi_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) &= \psi_n(\widehat{c(\sigma_1)}, \dots, \widehat{c(\sigma_n)}) \\ &= (bc(\sigma_1), \dots, bc(\sigma_n)) \\ &= (\sigma_1, \dots, \sigma_n). \end{aligned}$$

et, inversement, si $(\widehat{\sigma}_1, \widehat{\sigma}_2, \dots, \widehat{\sigma}_n)$ est une n -cellule de $\mathcal{B}(Q, I)$, c'est à dire un élément de la base de $C_n(\mathcal{B})$, nous avons :

$$\begin{aligned} \phi_n \psi_n(\widehat{\sigma}_1, \dots, \widehat{\sigma}_n) &= \phi_n(b(\sigma_1), \dots, b(\sigma_n)) \\ &= (\widehat{cb(\sigma_1)}, \dots, \widehat{cb(\sigma_n)}) \\ &= (\widetilde{\sigma}_1, \dots, \widetilde{\sigma}_n). \end{aligned}$$

□

Une conséquence immédiate est le corollaire suivant:

Corollaire 4.2.8 *Avec les hypothèses du théorème précédent, nous avons, pour chaque $i \geq 0$, des isomorphismes de groupes abéliens :*

- a) $H_i(\mathcal{B}) \simeq SH_i(A)$, et
- b) $H^i(\mathcal{B}, G) \simeq SH^i(A, G)$, pour tout groupe abélien G .

□

Nous avons vu à la section 3.1 que lorsque (Q, I) est un carquois lié avec I monomial, l'espace classifiant $\mathcal{B}(Q, I)$ a le même type d'homotopie que le graphe sous-jacent à Q .

Par ailleurs, il a aussi été noté que les algèbres monomiales admettent toujours une base semi-normée. Ceci, et le corollaire précédent donnent la preuve de la proposition suivante :

Proposition 4.2.9 *Soit $A = kQ/I$ une algèbre avec I monomial et Q connexe. Alors*

a) *Les groupes d'homologie simpliciale de A sont*

$$\mathrm{SH}_i(A) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0, \\ \bigoplus_{i=1}^{\chi(Q)} \mathbb{Z} & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

b) *Pour tout groupe abélien G , les groupes de cohomologie simpliciale à coefficients dans G sont*

$$\mathrm{SH}^i(A, G) = \begin{cases} G & \text{si } i = 0, \\ \bigoplus_{i=1}^{\chi(Q)} G & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

□

Un des outils les plus intéressants en vue de calculer les groupes d'homologie ou de cohomologie d'espaces topologiques sont les suites exactes longues de Mayer-Vietoris (voir [55, 47], par exemple). Une adaptation immédiate nous permet d'obtenir le resultat suivant:

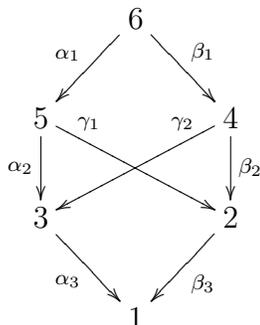
Proposition 4.2.10 *Soient (Q, I) un carquois lié, avec Q connexe, Q^1 et Q^2 deux sous-carquois pleins et convexes tels que tout chemin non nul de Q est dans Q^1 ou dans Q^2 , et $Q^0 = Q^1 \cap Q^2$. Posons $I^i = I \cap kQ^i$, et $A_i = kQ^i/I^i$ l'algèbre correspondante. Si les algèbres A et A_i admettent des bases semi-normées alors il existe une suite exacte longue de groupes d'homologie simpliciale d'algèbres*

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{SH}_i(A_0) \longrightarrow \mathrm{SH}_i(A_1) \oplus \mathrm{SH}_i(A_2) \longrightarrow \mathrm{SH}_i(A) \longrightarrow \mathrm{SH}_{i-1}(A_0) \longrightarrow \cdots$$

Démonstration : Avec les hypothèse faites au sujet de Q^1 et Q^2 , le complexe $\mathcal{B}(Q, I)$ est l'union des complexes $\mathcal{B}(Q^1, I^1)$ et $\mathcal{B}(Q^2, I^2)$. Cela mène à une suite exacte longue de groupes d'homologie d'espaces topologiques (voir Théorème 8.44, p 220 dans [55], par exemple). Finalement, le théorème 4.2.8 donne le résultat voulu.

□

Exemple 4.2.11 Considérons le carquois Q



et $I = \langle \alpha_1\gamma_1 - \beta_1\beta_2, \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\gamma_2, \alpha_2\alpha_3 - \delta_1\beta_3, \gamma_2\alpha_3 - \lambda\beta_2\beta_3 \rangle$ avec $\lambda \in k \setminus \{0,1\}$. En particulier, on remarquera que les chemins de longueur 3 sont dans l'idéal I . Soient Q^1 et Q^2 les sous-carquois pleins de Q engendrés par les ensembles de sommets $\{2,3,4,5,6\}$ et $\{1,2,3,4,5\}$ respectivement, et posons $Q^0 = Q^1 \cap Q^2$. Pour $i \in \{0,1,2\}$, désignons par I^i la restriction de I à kQ^i , et par A_i l'algèbre kQ^i/I^i . Les espaces $\mathcal{B}(Q^i, I^i)$ sont des cônes, tandis que l'intersection $\mathcal{B}(Q^1, I^1) \cap \mathcal{B}(Q^2, I^2)$ est homéomorphe à S^1 . Nous obtenons alors une suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{SH}_2(A) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \text{SH}_1(A) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

ce qui mène à

$$\text{SH}_i(A) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0, 2, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Comme il a été mentionné à la section 1.4, dans le cas d'une algèbre contrainte A , le groupe fondamental est indépendant de la présentation (Q, I) de celle-ci. Une conséquence immédiate est qu'il en va de même pour le premier groupe d'homologie simpliciale de A , ainsi que pour le premier groupe de cohomologie simpliciale à coefficients dans un groupe G .

Proposition 4.2.12 *Soit $A = kQ/I$ une algèbre contrainte ayant une base semi-normée, avec Q connexe. Alors les groupes $\text{SH}_1(A)$ et $\text{SH}^1(A, G)$ sont indépendants de la présentation de A .*

Démonstration : Soit $A = kQ/I$ une telle algèbre. Nous avons alors

$$\text{SH}_1(A) \simeq H_1(\mathcal{B}) \simeq \frac{\pi_1(\mathcal{B})}{[\pi_1(\mathcal{B}), \pi_1(\mathcal{B})]} \simeq \frac{\pi_1(Q, I)}{[\pi_1(Q, I), \pi_1(Q, I)]}.$$

Où le premier isomorphisme est donné par le corollaire 4.2.8, le deuxième par le théorème d'Hurewicz-Poincaré, et le troisième par le théorème 3.2.3. Or, A étant contrainte, $\pi_1(Q, I)$

est indépendant de la présentation. Par ailleurs, pour une groupe abélien G , en vertu du théorème des coefficients universels, nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{SH}^1(A, G) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{SH}_1(A), G) \oplus \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathrm{SH}_0(A), G) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{SH}_1(A), G). \end{aligned}$$

□

Par ailleurs, l'isomorphisme de complexes du théorème 4.2.7 donne lieu à la définition évidente d'un cup-produit sur le complexe $\mathrm{SC}^\bullet(A, k^+)$ obtenu en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, k^+)$ au complexe différentiel $(\mathrm{SC}_\bullet(A), d)$.

Définition 4.2.13 Soient f^p et g^q des éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{SC}_p(A), R)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{SC}_q(A), R)$, respectivement. Le **cup-produit** de f^p et g^q , qu'on note $f^p \smile g^q$, est l'élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{SC}_{p+q}(A), R)$ défini sur les éléments de base de $\mathrm{SC}_{p+q}(A)$ par

$$(f^p \smile g^q)(\sigma_1, \dots, \sigma_p, \sigma_{p+1}, \dots, \sigma_{p+q}) = f^p(\sigma_1, \dots, \sigma_p) g^q(\sigma_{p+1}, \dots, \sigma_{p+q})$$

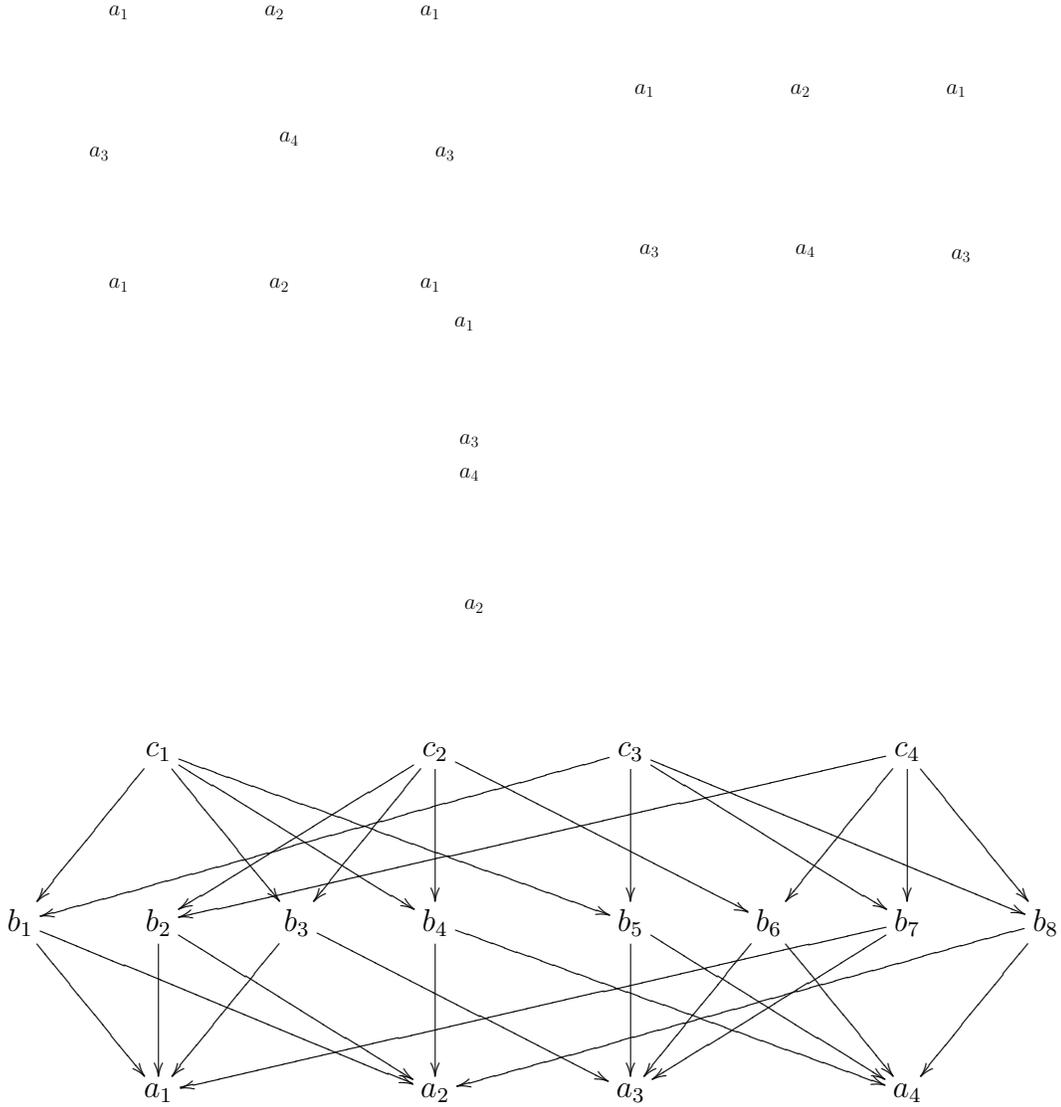
Il est aisé de vérifier que cette opération définit un produit en cohomologie. Ainsi, la somme directe de groupes de cohomologie simpliciale d'une algèbre A à coefficients dans le corps k , devient un anneau gradué $\mathrm{SH}^*(A, k) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{SH}^i(A, k)$ (on comparera avec 4.1.2 et 4.1.3).

Exemple 4.2.14 Considérons le tore T , et la décomposition cellulaire régulière de T donnée dans la figure de la page suivante.

Soit E_T l'ensemble des cellules de T ordonné par inclusion. Désignons par $\{a_i\}_i$, $\{b_i\}_i$, et $\{c_i\}_i$ les ensembles des cellules de dimension 0, 1, et 2, respectivement. L'espace classifiant $\mathcal{B}(E_T)$ est la subdivision barycentrique de T . Par ailleurs, considérons l'algèbre d'incidence $A = k(E_T)$ de E_T . En vertu du corollaire 4.2.8, nous avons

$$\mathrm{H}^i(T, k^+) = \mathrm{H}^i(\mathcal{B}(E_T), k^+) = \mathrm{SH}^i(A, k^+) = \begin{cases} k & \text{si } i = 0, 2, \\ k^2 & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est bien connu que le produit des deux générateurs de $\mathrm{H}^1(\mathcal{B}(E_T), k^+)$ est le générateur de $\mathrm{H}^2(\mathcal{B}(E_T), k^+)$. Ainsi, le produit des deux générateurs de $\mathrm{SH}^1(A, k^+)$ est le générateur de $\mathrm{SH}^2(A, k^+)$. Afin d'illustrer ceci, considérons le carquois associé à E_T :



Étant donné que A est une algèbre schurienne, nous identifierons (voir la démonstration de 4.2.4) un élément $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ de la base de $SC_n(A)$ à la suite de points (x_0, x_1, \dots, x_n) où $\sigma_i \in e_{x_{i-1}} A e_{x_i}$. Naturellement, nous désignerons par $(x_0, \dots, x_n)^*$ l'élément de $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(SC_n(A), k^+)$ défini par :

$$(x_0, \dots, x_n)^*(y_0, \dots, y_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } (y_0, \dots, y_n) = (x_0, \dots, x_n) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Considérons les éléments w_1 et w_2 de $SC_1(A)$ définis par :

$$w_1 = (b_1, a_2) - (c_1, a_2) + (c_1, b_4) + (b_4, a_4) - (c_2, a_4) + (c_2, b_6)$$

4.2. HOMOLOGIE SIMPLICIALE D'ALGÈBRES

a_1	b_1	a_2	b_2	a_1	a_1	b_1	a_2	b_2	a_1
b_3	c_1	b_4	c_2	b_3	b_3	c_1	b_4	c_2	b_3
a_3	b_5	a_4	b_6	a_3	a_3	b_5	a_4	b_6	a_3
b_7	c_3	b_8	c_4	b_7	b_7	c_3	b_8	c_4	b_7
a_1	b_1	a_2	b_2	a_1	a_1	b_1	a_2	b_2	a_1
		w_1					w_2		

$$\begin{aligned}
 &+ (b_6, a_3) - (c_3, a_3) + (c_4, b_7) + (b_7, a_1) - (c_3, a_1) + (c_3, b_1). \\
 w_2 &= (b_7, a_1) - (c_4, a_6) + (c_4, b_2) + (b_2, a_2) - (c_2, a_2) + (c_3, b_4) \\
 &+ (b_4, a_4) - (c_1, a_4) + (c_1, b_5) + (b_5, a_3) - (c_3, a_3) + (c_3, b_7).
 \end{aligned}$$

Un calcul immédiat montre que $\overline{w_1}$ et $\overline{w_2}$ sont deux générateurs de $\text{SH}_1(A)$. Qui plus est, $\overline{w_1^*}$ et $\overline{w_2^*}$ sont deux générateurs de $\text{SH}^1(A, k^+)$. Par ailleurs, nous avons

$$(w_1^* \smile w_2^*)(c_1, b_4, a_4) = w_1^*(c_1, b_4)w_2^*(b_4, a_4) = 1$$

Ainsi, $w_1^* \smile w_2^* \neq 0$ dans $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{SC}_2(A), k)$. En fait, il est aisé, quoique long, de vérifier que $\overline{w_1^* \smile w_2^*} = \overline{(c_1, b_4, a_4)^*}$ est un générateur de $\text{SH}^2(A, k^+)$.

Chapitre 5

COHOMOLOGIE DE HOCHSCHILD D'ALGÈBRES

Le but de ce chapitre est d'étudier une autre théorie de cohomologie des algèbres, mieux connue celle-ci : la cohomologie de Hochschild introduite dans [39]. Ainsi, nous débutons ce chapitre avec une brève exposition des notions de base, ainsi que l'interprétation des groupes de cohomologie $\mathrm{HH}^i(A)$ en petits degrés ($i = 0, 1, 2$) et quelques résultats fondamentaux. La deuxième section est consacrée à une comparaison avec la cohomologie simpliciale de l'algèbre, dans le même esprit que [34, 42]. Notamment, nous obtenons des conditions suffisantes pour l'existence d'isomorphismes entre ces différents groupes de cohomologie, généralisant ainsi un théorème bien connu dû à Gerstenhaber et Schack [34]. Finalement, nous nous intéressons à la structure d'anneau de la cohomologie de Hochschild d'une algèbre. En particulier, nous exposons deux constructions possibles de cette structure d'anneau, que nous comparons à l'anneau de cohomologie simpliciale de l'algèbre, lui-même isomorphe à l'anneau de cohomologie de l'espace classifiant $\mathcal{B}(Q, I)$.

5.1 Généralités

Rappelons que, étant donnée une k -algèbre associative A , son **algèbre enveloppante**, notée A^e est, par définition, le produit tensoriel $A^e = A^{op} \otimes_k A$, où A^{op} désigne l'algèbre opposée de A . La multiplication dans A^e est définie par $(z \otimes a)(y \otimes b) = yz \otimes ab$. L'utilité de A^e réside dans le fait qu'il est possible de considérer les $A - A$ -bimodules

comme des A^e -modules (à gauche et à droite), et vice-versa.

Lemme 5.1.1 *Les catégories $A - A\text{-mod}$ et $\text{mod-}A^e$ ($A^e\text{-mod}$ respectivement) sont équivalentes.*

Démonstration : Un $A - A$ -module ${}_A M_A$ acquiert une structure naturelle de A^e -module à droite (à gauche respectivement) en posant, pour $m \in M$, et $a \otimes b \in A^e$,

$$m(a \otimes b) = amb \quad ((a \otimes b)m = bma \text{ respectivement})$$

Il est aisé de vérifier que ceci induit les équivalences cherchées. □

Définition 5.1.2 *Soit A une k -algèbre. Le **complexe standard** associé à l'algèbre A est le complexe de k -espaces vectoriels $(C_\bullet(A), b)$, défini par :*

$$C_i(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < -1, \\ A & \text{si } i = -1, \\ C_{i-1}(A) \otimes_k A & \text{sinon.} \end{cases}$$

et la différentielle $b_n : C_n(A) \rightarrow C_{n-1}(A)$ est donnée par $b_i = 0$ pour $i \leq -1$ et

$$b_n(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = \sum_{j=0}^n (-1)^j (a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1})$$

Les $C_i(A)$ ont une structure naturelle de $A - A$ -bimodules, et il est aisé de vérifier que $(C_\bullet(A), b)$ est un complexe différentiel exact (voir [49, 1], par exemple).

Étant donné un $A - A$ -module ${}_A M_A$, nous pouvons appliquer les foncteurs $M \otimes_{A^e} -$ et $\text{Hom}_{A^e}(-, M)$ au complexe standard associé à A . Nous obtenons alors des complexes $(M \otimes_{A^e} C_\bullet(A), b')$ et $(\text{Hom}_{A^e}(C_\bullet(A), M), b^\bullet)$. Les groupes d'homologie et de cohomologie de ces derniers sont appelés les **groupes d'homologie** et de **cohomologie de Hochschild de A à coefficients dans M** , et ils sont notés $\text{HH}_i(A, M)$ et $\text{HH}^i(A, M)$, respectivement. Dans le cas où M est le $A - A$ -module ${}_A A_A$, on écrit simplement $\text{HH}_i(A)$ et $\text{HH}^i(A)$.

En vue du calcul des groupes de cohomologie $\text{HH}^i(A, M)$, il est intéressant de rappeler l'isomorphisme canonique suivant. Pour $n \geq 2$, et avec la convention que $A^{\otimes 0} = k$, nous avons :

$$\text{Hom}_{A^e}(A^{\otimes n}, M) \simeq \text{Hom}_k(A^{\otimes n-2}, M)$$

Ces isomorphismes donnent lieu, de façon évidente, à un nouveau complexe, dont la différentielle sera encore notée b^\bullet .

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes 2}, M) & \xrightarrow{b^0} & \mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes 3}, M) & \xrightarrow{b^1} & \mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes 4}, M) \xrightarrow{b^2} \dots \\
 & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{b^0} & \mathrm{Hom}_k(A, M) & \xrightarrow{b^1} & \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes 2}, M) \xrightarrow{b^3} \dots
 \end{array}$$

Remarquons que lorsque A est un k -module projectif, comme c'est le cas lorsque k est un corps, alors les $C_i(A)$ sont des A^e -modules projectifs. Ainsi, le complexe standard est une résolution projective du A^e -module A . Comme nous nous intéressons à des algèbres sur des corps, la remarque précédente nous permet de travailler avec la définition alternative suivante:

Définition 5.1.3 Soit A une algèbre sur un corps k , et ${}_A M_A$ un $A - A$ -bimodule. Les $i^{\text{ièmes}}$ **groupes d'homologie et de cohomologie de Hochschild de A à coefficients dans M** sont, respectivement, les groupes

- a) $\mathrm{HH}_i(A, M) = \mathrm{Tor}_i^{A^e}(A, M)$, et
- b) $\mathrm{HH}^i(A, M) = \mathrm{Ext}_{A^e}^i(A, M)$.

Sans aller dans le détail, nous nous contenterons ici de faire une brève exposition de l'interprétation des premiers groupes de cohomologie d'une algèbre A . Il s'agit là de résultats tout à fait classiques et bien connus que nous incluons afin d'illustrer l'utilité de ces groupes. On pourra consulter [1, 19, 49, 38], par exemple pour plus de détails à ce sujet.

Proposition 5.1.4 L'espace $\mathrm{HH}^0(A, M)$ est l'ensemble des éléments x de A tels que $mx = xm$ pour tout $m \in M$. En particulier, $\mathrm{HH}^0(A)$ est isomorphe au centre $Z(A)$ de A .

□

Rappelons qu'une **dérivation** d'une k -algèbre A dans un $A - A$ -bimodule M est une application k -linéaire $\partial : A \rightarrow M$ telle que $\partial(ab) = a\partial(b) + \partial(a)b$, pour tous a et b dans A . Une dérivation est dite être une **dérivation interne** s'il existe un élément m dans M tel que $\partial(a) = am - ma$ pour tout a dans A . On note $\mathrm{Der}(A, M)$ et $\mathrm{IDer}(A, M)$ les espaces des dérivations et des dérivations internes de A dans M , respectivement.

Proposition 5.1.5 *L'espace $\mathrm{HH}^1(A, M)$ est isomorphe au quotient $\mathrm{Der}(A, M)/\mathrm{IDer}(A, M)$.*

□

Soit $\pi : B \rightarrow A$ un morphisme surjectif de k -algèbres dont le noyau M est tel que la restriction de la multiplication de B à M fait en sorte que $M^2 = 0$. Ce dernier acquiert une structure naturelle de $A - A$ -bimodule en posant, pour $a, a' \in A$ et $m \in M$,

$$ama' = bmb'$$

où b et b' sont des éléments de B tels que $\pi(b) = a$ et $\pi(b') = a'$. Notons aussi que dans ce cas, nous avons un isomorphisme d'espaces vectoriels $B \simeq A \oplus M$. Dans cette situation, nous dirons que B est une extension de A par M . Naturellement, deux extensions B et B' sont équivalentes s'il existe un diagramme commutatif à lignes exactes de k -espaces vectoriels

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\pi} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow F & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{\pi'} & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où le morphisme F (qui est forcément un isomorphisme) est un morphisme de k -algèbres et les flèches horizontales sont les inclusions canoniques.

Proposition 5.1.6 *Il existe une bijection entre $\mathrm{HH}^2(A, M)$ et les classes d'équivalence d'extensions de A par M .*

□

Nous venons de voir comment interpréter les groupes $\mathrm{HH}^2(A, M)$ comme des extensions de l'algèbre A . Dans le cas où M est le $A - A$ -module A lui-même, il est possible de donner une autre interprétation à $\mathrm{HH}^i(A)$. En effet, il a été montré dans [33, 35] que les groupes de cohomologie de Hochschild des degrés 2 et 3 sont étroitement liés aux propriétés de rigidité de l'algèbre A .

Le résultat suivant, dû à Happel [38] est l'un des outils les plus intéressants en vue de calculer les groupes de cohomologie de Hochschild d'algèbres triangulaires. Notons que des résultats analogues à celui-ci ont été établis dans des contextes plus généraux (voir [46, 21, 37]).

Théorème 5.1.7 (Happel [38]) *Soit $A = B[M]$ l'extension d'une algèbre B par un module M . Alors, il existe une suite exacte de k -espaces vectoriels*

$$0 \rightarrow \mathrm{HH}^0(A) \rightarrow \mathrm{HH}^0(B) \rightarrow \mathrm{End}_B(M)/k \rightarrow \mathrm{HH}^1(A) \rightarrow \mathrm{HH}^1(B) \rightarrow \mathrm{Ext}_B^1(M, M) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \mathrm{HH}^i(B) \rightarrow \mathrm{Ext}_B^i(M, M) \rightarrow \mathrm{HH}^{i+1}(A) \rightarrow \mathrm{HH}^{i+1}(B) \rightarrow \dots$$

□

Notons enfin que les groupes $\mathrm{HH}^i(A, A)$ sont invariants pour le processus d'inclinaison. En fait, ceci est un cas particulier du résultat plus général qui suit, résultat encore une fois dû à Happel.

Théorème 5.1.8 (Happel [38]) *Soient A et B deux k -algèbres telles que l'on ait une équivalence de catégories triangulées $D^b(\mathrm{mod}\text{-}A) \simeq D^b(\mathrm{mod}\text{-}B)$. Alors, pour tout $i \geq 0$, on a des isomorphismes d'espaces vectoriels $\mathrm{HH}^i(A) \simeq \mathrm{HH}^i(B)$.*

□

5.2 Comparaison avec la cohomologie simpliciale

Étant donné que nous nous intéressons à calculer les groupes $\mathrm{Ext}_{A^e}^i(A, M)$, il serait utile de compter sur une résolution projective de ${}_A A_A$ qui soit facile à exploiter. Notons que la résolution de Hochschild de ${}_A A_A$ est très loin d'être minimale : la dimension des espaces vectoriels utilisés croît très rapidement. En effet, $\dim_k C_i(A) = (\dim_k A)^{i+2}$.

La résolution suivante, due à Cibils [20], bien qu'encore non minimale, nous sera utile par la suite (voir remarque 5.2.3).

Soient $A = kQ/I$ une algèbre, et E la sous-algèbre de A engendrée par les sommets de Q . Nous avons en particulier que E est une k -algèbre semi-simple, et, en tant que E - E -bimodules, $A \simeq \mathrm{rad}A \oplus E$. Considérons les puissances tensorielles sur E de $\mathrm{rad}A$

$$(\mathrm{rad}A)^{\otimes n} = \begin{cases} E & \text{si } n = 0, \\ (\mathrm{rad}A)^{\otimes(n-1)} \otimes_E \mathrm{rad}A & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Par la suite nous écrirons simplement $\mathrm{rad}A^{\otimes n}$ au lieu de $(\mathrm{rad}A)^{\otimes n}$.

Proposition 5.2.1 (Cibils [20]) *Soit $A = kQ/I$ une algèbre, E et $\mathrm{rad}A^{\otimes n}$ comme précédemment. Alors, on a une résolution projective de ${}_A A_A$*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & A \otimes_E \text{rad } A^{\otimes n} \otimes_E A & \xrightarrow{b_n} & A \otimes_E \text{rad } A^{\otimes(n-1)} \otimes_E A & \xrightarrow{b_{n-1}} & \cdots \\
 & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \\
 & & A \otimes_E \text{rad } A \otimes_E A & \xrightarrow{b_1} & A \otimes_E A & \xrightarrow{b_0} & A \longrightarrow 0
 \end{array}$$

où b_0 est la multiplication de A et b est la différentielle du complexe standard, c'est à dire

$$\begin{aligned}
 b_n(a \otimes \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n \otimes b) &= a\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n \otimes b \\
 &+ \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j a \otimes \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_j \sigma_{j+1} \otimes \cdots \otimes \sigma_n b \\
 &+ (-1)^n a \otimes \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n b.
 \end{aligned}$$

□

Nous sommes intéressés aux groupes de cohomologie du complexe obtenu en appliquant le foncteur $\text{Hom}_{A^e}(-, M)$ au complexe ci-haut. Le lemme suivant montre qu'il est possible de simplifier davantage le complexe résultant.

Lemme 5.2.2 *Il existe, pour tout $A - A$ -bimodule M , et tout $n \geq 0$ un isomorphisme d'espaces vectoriels*

$$\text{Hom}_{A^e}(A \otimes_E \text{rad } A^{\otimes n} \otimes_E A, M) \simeq \text{Hom}_{E^e}(\text{rad } A^{\otimes n}, M)$$

Démonstration : Étant donné un morphisme $f \in \text{Hom}_{A^e}(A \otimes_E \text{rad } A^{\otimes n} \otimes_E A, M)$, et $\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n \in \text{rad } A^{\otimes n}$, posons

$$\phi_n f(\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n) = f(1 \otimes \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n \otimes 1)$$

Réciproquement, pour $g \in \text{Hom}_{E^e}(\text{rad } A^{\otimes n}, M)$, et $a \otimes \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n \otimes b \in A \otimes_E \text{rad } A^{\otimes n} \otimes_E A$, posons

$$\psi_n g(a \otimes \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n \otimes b) = ag(\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n)b$$

Il est alors aisé de vérifier que $\phi_n f$ et $\psi_n g$ sont des morphismes de $E - E$ -modules et $A - A$ -bimodules, respectivement, et, enfin, que ϕ_n et ψ_n sont linéaires et mutuellement inverses.

□

Remarquons finalement que les isomorphismes précédents permettent de définir une différentielle

$$b^{n+1} : \text{Hom}_{E^e}(\text{rad } A^{\otimes n}, M) \longrightarrow \text{Hom}_{E^e}(\text{rad } A^{\otimes(n+1)}, M)$$

en posant, pour $f \in \text{Hom}_{E^e}(\text{rad}A^{\otimes n}, M)$ et $\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_{n+1} \in \text{rad}A^{\otimes(n+1)}$,

$$\begin{aligned} (b^{n+1}f)(\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_{n+1}) &= \sigma_1 f(\sigma_2 \otimes \cdots \otimes \sigma_{n+1}) \\ &+ \sum_{j=1}^n (-1)^j f(\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_j \sigma_{j+1} \otimes \cdots \otimes \sigma_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} f(\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n) \sigma_{n+1} \end{aligned}$$

Remarque 5.2.3 Le fait que les produits tensoriels soient pris sur E a une conséquence importante, dans laquelle réside l'utilité de la résolution présentée ci-haut. Si σ_1 et σ_2 sont deux éléments de $\text{rad}A$, avec, disons $\sigma_1 \in e_i A e_j$, et $\sigma_2 \in e_l A e_m$, alors, dans $\text{rad}A^{\otimes 2}$, nous avons

$$\sigma_1 \otimes \sigma_2 = \sigma_1 e_j \otimes e_l \sigma_2 = \sigma_1 e_j e_l \otimes \sigma_2 = \sigma_1 \otimes e_j e_l \sigma_2$$

et cette expression est nulle lorsque $j \neq l$. On remarquera que ceci n'est pas vrai lorsque les produits tensoriels sont pris sur k , comme dans le complexe standard. Un raisonnement similaire montre que $\text{rad}A^{\otimes n}$ est engendré par les éléments de la forme $\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n$ où $\sigma_i \in e_{i-1} A e_i$ pour tout i tel que $1 < i \leq n$. Qui plus est, si A admet une base semi-normée B , nous pouvons supposer, en vertu de la k -linéarité, que les σ_i sont des éléments de B . Ainsi, par la suite nous travaillerons, sauf mention explicite du contraire, avec la résolution simplifiée dont la différentielle est donnée ci-haut.

Dans [34], Gerstenhaber et Schack ont montré que pour les algèbres d'incidence d'ensembles ordonnés $A = k(E)$, les groupes de cohomologie simpliciale de A à coefficients dans k^+ sont isomorphes aux groupes de cohomologie de Hochschild de A . Un résultat analogue pour l'homologie a été établi dans [20]. Dans [42], Martins et de la Peña ont considéré un contexte plus général : celui des algèbres admettant des bases semi-normées. Forts de la résolution projective de ${}_A A_A$ que nous venons d'exposer, nous sommes en mesure d'améliorer ces résultats.

Comme dans [42], pour $n \geq 0$, définissons $\epsilon_n : \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{SC}_n(A), k^+) \rightarrow \text{Hom}_{E^e}(\text{rad}A^{\otimes n}, A)$ de la façon suivante : pour un morphisme $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{SC}_n(A), k^+)$ et un élément $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in B^n$, posons

$$\epsilon_n(f)(\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n) = \begin{cases} f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \sigma_1 \cdots \sigma_n & \text{si } (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \text{SC}_n(A), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Inversement, pour $n \geq 0$ posons $\mu_n : \text{Hom}_{E^e}(\text{rad}A^{\otimes n}, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{SC}_n(A), k^+)$ défini de la façon suivante : étant donné un élément $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ dans la base de $\text{SC}_n(A)$, nous

avons que $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n \neq 0$ et se trouve dans, disons, e_0Ae_n . Ce dernier peut s'écrire comme somme directe d'espaces vectoriels

$$e_0Ae_n = \langle \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n \rangle \oplus A_{0n}$$

où A_{0n} est peut-être nul. D'autre part, $\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n \in \text{rad}A^{\otimes n}$. Ainsi, pour $g \in \text{Hom}_{E^e}(\text{rad}A^{\otimes n}, A)$, nous avons

$$g(\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n) = g(e_0\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n e_n) = e_0g(\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n)e_n$$

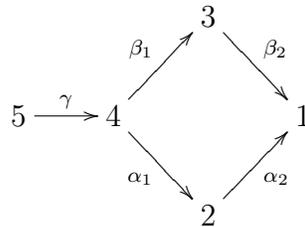
de sorte que $g(\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n) \in e_0Ae_n$. Il existe donc un unique scalaire λ et un élément $a_0 \in A_{0n}$ tels que

$$g(\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n) = \lambda\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n + a_0$$

Posons alors $\mu_n(g)(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \lambda$.

La linéarité des morphismes ϵ_n et μ_n est évidente. Cependant, pour pouvoir les utiliser au niveau de la cohomologie, il faut qu'ils définissent des morphismes de complexes. Comme nous le verrons plus loin, c'est toujours le cas pour ϵ_n . Par contre, l'exemple suivant montre qu'il n'en va pas de même pour μ_n .

Exemple 5.2.4 Soit Q le carquois



et $A = kQ$. Soient a et b deux scalaires. Considérons le morphisme $f \in \text{Hom}_{E^e}(\text{rad}A^{\otimes 2}, A)$ défini par

$$f(x \otimes y) = \begin{cases} a\alpha_1\alpha_2 + b\beta_1\beta_2 & \text{si } x \otimes y = \alpha_1 \otimes \alpha_2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} b^3 f(\gamma \otimes \alpha_1 \otimes \alpha_2) &= \gamma f(\alpha_1 \otimes \alpha_2) - f(\gamma\alpha_1 \otimes \alpha_2) + f(\gamma \otimes \alpha_1\alpha_2) - f(\gamma \otimes \alpha_1)\alpha_2 \\ &= \gamma f(\alpha_1 \otimes \alpha_2) \\ &= (a + b)\gamma\alpha_1\alpha_2 \end{aligned}$$

de sorte que $(\mu_3 b^3 f)(\gamma, \alpha_1, \alpha_2) = a + b$.

D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned} (d^3 \mu_2 f)(\gamma, \alpha_1, \alpha_2) &= (\mu_2 f)((\alpha_1, \alpha_2) + (\gamma \alpha_1, \alpha_2) - (\gamma, \alpha_1 \alpha_2) + (\gamma, \alpha_1)) \\ &= (\mu_2 f)(\alpha_1, \alpha_2) + (\mu_2 f)(\gamma \alpha_1, \alpha_2) - (\mu_2 f)(\gamma, \alpha_1 \alpha_2) + (\mu_2 f)(\gamma, \alpha_1). \end{aligned}$$

Or $f(\alpha_1 \otimes \alpha_2) = a\alpha_1\alpha_2 + b\beta_1\beta_2$, ce qui donne $(\mu_2 f)(\alpha_1, \alpha_2) = a$, et $f(\gamma \alpha_1 \otimes \alpha_2) = f(\gamma \otimes \alpha_1 \alpha_2) = f(\gamma \otimes \alpha_1) = 0$. Ainsi, $(d^3 \mu_2 f)(\gamma, \alpha_1, \alpha_2) = a$.

Remarquons que l'algèbre de l'exemple précédent n'est pas schurienne. En effet, $\dim_k e_4 A e_1 = 2$, et c'est précisément en utilisant ce fait que nous avons construit le morphisme f qui est tel que $(d\mu)f \neq (\mu b)f$. Cette observation nous mène au lemme suivant (voir [42]).

Lemme 5.2.5 *Soit $A = kQ/I$ une algèbre ayant une base semi-normée. Avec les notations précédentes,*

- a) $\mu_n \epsilon_n = id$, pour $n \geq 1$,
- b) ϵ_\bullet est un morphisme de complexes,
- c) Si A est schurienne, alors μ_\bullet est un morphisme de complexes.

Démonstration :

- a) Soit $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{SC}_n(A), k^+)$. Alors, pour un élément $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ de la base de $\text{SC}_n(A)$, nous avons

$$(\epsilon_n f)(\sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_n) = f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \sigma_1 \cdots \sigma_n$$

de sorte que $(\mu_n \epsilon_n)(f)(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$.

- b) Soit $f \in \text{Hom}_{E^e}(\text{rad} A^{\otimes n}, A)$, et $(\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1})$ un élément de la base de $\text{SC}_n(A)$. Puisque B est une base semi-normée, il existe des scalaires non nuls $c_{j,j+1}$ tels que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ on a $\sigma_j \sigma_{j+1} = c_{j,j+1} b(\sigma_j, \sigma_{j+1})$. Nous avons alors:

$$\begin{aligned} & (b^{n+1} \epsilon_n f)(\sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_{n+1}) \\ &= \sigma_1 (\epsilon_n f)(\sigma_2 \otimes \dots \otimes \sigma_{n+1}) \\ &+ \sum_{j=1}^n (-1)^j (\epsilon_n f)(\sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_j \sigma_{j+1} \otimes \dots \otimes \sigma_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} (\epsilon_n f)(\sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_n) \sigma_{n+1} \\ &= \sigma_1 (\epsilon_n f)(\sigma_2 \otimes \dots \otimes \sigma_{n+1}) \\ &+ \sum_{j=1}^n (-1)^j c_{j,j+1} (\epsilon_n f)(\sigma_1 \otimes \dots \otimes b(\sigma_j, \sigma_{j+1}) \otimes \dots \otimes \sigma_{n+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (-1)^{n+1}(\epsilon_n f)(\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n)\sigma_{n+1} \\
 & = f(\sigma_2, \dots, \sigma_{n+1})\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{n+1} \\
 & + \sum_{j=1}^n (-1)^j c_{j,j+1} f(\sigma_1, \dots, b(\sigma_j, \sigma_{j+1}), \dots, \sigma_{n+1})\sigma_1 \cdots b(\sigma_j, \sigma_{j+1}) \cdots \sigma_{n+1} \\
 & + (-1)^{n+1} f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)\sigma_1 \cdots \sigma_{n+1} \\
 & = f(\sigma_2, \dots, \sigma_{n+1})\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{n+1} \\
 & + \sum_{j=1}^n (-1)^j f(\sigma_1, \dots, b(\sigma_j, \sigma_{j+1}), \dots, \sigma_{n+1})\sigma_1 \cdots \sigma_{n+1} \\
 & + (-1)^{n+1} f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)\sigma_1 \cdots \sigma_{n+1} \\
 & = (d^{n+1}f)(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n+1})\sigma_1 \cdots \sigma_{n+1} \\
 & = (\epsilon_{n+1} d^{n+1}f)(\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_{n+1}).
 \end{aligned}$$

c) Supposons maintenant que A est schurienne. Pour $f \in \text{Hom}_{E^e}(\text{rad}A^{\otimes n}, A)$ et un élément $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ de la base de $\text{SC}_n(A)$, nous avons :

$$\begin{aligned}
 (b^{n+1}f)(\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_{n+1}) & = \sigma_1 f(\sigma_2 \otimes \cdots \otimes \sigma_{n+1}) \\
 & + \sum_{j=1}^n (-1)^j f(\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_j \sigma_{j+1} \otimes \cdots \otimes \sigma_n) \\
 & + (-1)^n f(\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n)\sigma_{n+1}.
 \end{aligned}$$

Mais, étant donné que A est schurienne, il existe des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1}$ tels que

$$\begin{aligned}
 f(\sigma_2 \otimes \cdots \otimes \sigma_{n+1}) & = \lambda_0 \sigma_2 \cdots \sigma_{n+1}; \\
 f(\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_j \sigma_{j+1} \otimes \cdots \otimes \sigma_n) & = \lambda_j \sigma_1 \cdots \sigma_{n+1}; \\
 f(\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n) & = \lambda_{n+1} \sigma_1 \cdots \sigma_n.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(b^{n+1}f)(\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_{n+1}) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \lambda_j \sigma_1 \cdots \sigma_{n+1}.$$

De sorte que

$$(\mu_{n+1} b^{n+1}f)(\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1}) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \lambda_j.$$

D'autre part,

$$(d^{n+1} \mu_n f)(\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1}) = (\mu_n f)(\sigma_2, \dots, \sigma_{n+1})$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=1}^n (-1)^j (\mu_n f)(\sigma_1, \dots, b(\sigma_j, \sigma_{j+1}), \dots, \sigma_n + 1) \\
 & + (-1)^{n+1} (\mu_n f)(\sigma_1, \dots, \sigma_n).
 \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
 f(\sigma_2 \otimes \dots \otimes \sigma_{n+1}) & + \sum_{j=1}^n (-1)^j f(\sigma_1 \otimes \dots \otimes b(\sigma_j, \sigma_{j+1}) \otimes \dots \otimes \sigma_{n+1}) \\
 & + (-1)^{n+1} f(\sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_n) \\
 = \lambda_0 \sigma_2 \dots \sigma_{n+1} & + \sum_{j=1}^n (-1)^j \frac{\lambda_j}{c_{j,j+1}} \sigma_1 \dots \sigma_{n+1} + (-1)^{n+1} \lambda_{n+1} \sigma_1 \dots \sigma_n \\
 = \lambda_0 \sigma_2 \dots \sigma_{n+1} & + \sum_{j=1}^n (-1)^j \lambda_j \sigma_1 \dots b(\sigma_j, \sigma_{j+1}) \dots \sigma_{n+1} + (-1)^{n+1} \lambda_{n+1} \sigma_1 \dots \sigma_n
 \end{aligned}$$

et donc

$$(d^{n+1} \mu_n f)(\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1}) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \lambda_j.$$

□

Le morphisme μ_\bullet n'étant généralement pas un morphisme de complexes, ϵ_\bullet n'est pas un morphisme de complexes scindé. Cependant, nous avons le résultat suivant :

Proposition 5.2.6 (Martins - de la Peña, [42]) *Soit $A = kQ/I$ une algèbre ayant une base semi normée. Alors,*

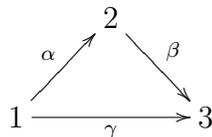
- a) *Le morphisme $H^1(\epsilon) : SH^1(A, k^+) \longrightarrow HH^1(A)$ est toujours un monomorphisme,*
- b) *Si A est schurienne, alors, pour tout $i \geq 0$, il existe un monomorphisme de groupes abéliens $H^i(\epsilon) : SH^i(A, k^+) \hookrightarrow HH^i(A)$.*

□

Comme il a été mentionné précédemment, Gerstenhaber et Schack ont montré dans [34] que pour les algèbres d'incidence, les groupes de cohomologie simpliciale et de Hochschild coïncident. Dans ce cas, les morphismes de la proposition 5.2.6 sont donc des isomorphismes. Par ailleurs, dans [25], de la Peña et Saorín ont obtenu des conditions nécessaires et suffisantes pour que le monomorphisme du corollaire précédent soit un isomorphisme. Les conditions suffisantes sont vérifiées notamment par les algèbres schurienne triangulaires. Ainsi, les mêmes calculs que ceux de la preuve précédente montrent

que pour une algèbre schurienne triangulaire le monomorphisme $H^1(\epsilon)$ est un isomorphisme. Nous sommes donc portés à nous demander si c'est le cas pour les $H^i(\epsilon)$, lorsque $i > 1$. L'exemple suivant montre que la réponse est négative.

Exemple 5.2.7 Soit Q le carquois



lié par l'idéal $I = \langle \alpha\beta \rangle$. L'algèbre $A = kQ/I$ est schurienne et triangulaire. L'idéal I étant monomial, il suit de 3.1.2 que le graphe sous-jacent à Q a le même type d'homotopie que l'espace classifiant $\mathcal{B} = \mathcal{B}(Q, I)$. Il suit alors de 4.2.8 que :

$$SH^i(A, k^+) \simeq H^i(\mathcal{B}, k^+) = \begin{cases} k & \text{si } i = 0, 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par ailleurs, l'algèbre A est l'extension ponctuelle de $B = kQ'$, où Q' est le carquois $2 \longrightarrow 3$, par le module $M = S_2 \oplus S_3$. En utilisant la suite exacte longue de Happel (voir 5.1.7), par exemple, nous obtenons

$$HH^i(A) = \begin{cases} k & \text{si } i = 0, 1, 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étant donné que $\dim_k HH^2(A) = 1$, il existe un morphisme $f \in \text{Hom}_{E^e}(\text{rad}A^{\otimes 2}, A)$ dont la classe en cohomologie est non nulle. Nous prétendons que $f : \text{rad}A^{\otimes 2} \rightarrow A$, défini par

$$f(x \otimes y) = \begin{cases} \gamma & \text{si } x \otimes y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est un générateur de $HH^2(A)$. En effet, étant donné que $\text{rad}A^{\otimes 3} = 0$, f est dans $\text{Ker } b^3$. Par ailleurs, supposons qu'il existe $g \in \text{Hom}_{E^e}(\text{rad } A, A)$ tel que $f = b^2g$. Alors,

$$\begin{aligned} f(\alpha \otimes \beta) &= (b^2g)(\alpha \otimes \beta) \\ &= \alpha g(\beta) - g(\alpha\beta) + g(\alpha)\beta \end{aligned}$$

Or, g étant un morphisme de $E - E$ -bimodules, il existe des scalaires a et b tels que $g(\alpha) = a\alpha$ et $g(\beta) = b\beta$. Ainsi, nous avons

$$f(\alpha \otimes \beta) = (a + b)\alpha\beta = 0$$

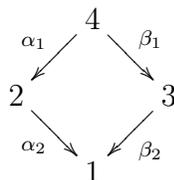
et ceci contredit le fait que $f(\alpha \otimes \beta) = \gamma$.

Ce qui, dans l'exemple précédent, a permis de construire le cocycle non trivial f est l'existence de deux chemins parallèles $\alpha\beta$ et γ , le premier se trouvant dans l'idéal mais pas le deuxième. Ceci nous mène à la définition suivante.

Définition 5.2.8 Une algèbre $A = kQ/I$ est dite **semi-commutative** si pour toute paire de chemins parallèles w et w' dans Q on a $w \in I$ si et seulement si $w' \in I$.

Exemples 5.2.9

- a) Les algèbres d'incidence d'ensembles ordonnés, ainsi que leurs quotients sont semi-commutatives.
- b) L'algèbre de l'exemple précédent est schurienne, mais n'est pas semi-commutative.
- c) Soit $A = kQ/I$ l'algèbre du carquois Q



lié par l'idéal $I = \langle \alpha_1\alpha_2, \beta_1\beta_2 \rangle$. L'algèbre A est schurienne et semi-commutative.

- d) Toute algèbre héréditaire est semi-commutative.

Remarque 5.2.10 Dans [26], les algèbres schuriennes triangulaires et semi-commutatives sont appelées **faiblement transitives**.

La discussion faite dans l'exemple 5.2.7, ainsi que la définition ci-haut nous mènent au théorème suivant, qui est en fait le résultat principal de ce chapitre ([16]).

Théorème 5.2.11 Soit $A = kQ/I$ une algèbre schurienne triangulaire et semi-commutative. Alors, pour tout $i \geq 0$, il existe un isomorphisme de groupes abéliens

$$H^i(\epsilon) : SH^i(A, k^+) \xrightarrow{\sim} HH^i(A) .$$

Démonstration : Notons d'abord que l'algèbre A étant schurienne, elle admet une base semi-normée B . Par ailleurs, il suit du lemme 5.2.5 que nous avons un morphisme de complexes $\mu_\bullet : \text{Hom}_{E^e}(\text{rad } A^{\otimes \bullet}, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{SC}_\bullet(A), k^+)$. Comme $\mu_n \epsilon_n = id$, il suffit de montrer que $\epsilon_n \mu_n = id$.

Soient donc f un élément de $\text{Hom}_{E^e}(\text{rad } A^{\otimes n}, A)$, et $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ un élément de B^n tel que, disons $\sigma_1 \in e_0 A e_1$, et $\sigma_n \in e_{n-1} A e_n$.

Dans un premier temps, supposons que $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n \neq 0$. Comme on a vu précédemment, $f(\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n) \in e_0Ae_n$. L'algèbre A étant schurienne, il existe un scalaire λ tel que

$$f(\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n) = \lambda\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n,$$

de sorte que $(\mu_n f)(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \lambda$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} (\epsilon_n \mu_n f)(\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n) &= ((\mu_n f)(\sigma_1, \dots, \sigma_n))\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n \\ &= \lambda(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n) \\ &= f(\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n). \end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas où $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n = 0$. Dans cette situation, le n -uplet $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ n'est pas dans la base de $SC_n(A)$, et alors

$$(\epsilon_n \mu_n f)(\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n) = 0.$$

D'autre part, il suit de 4.2.6 qu'il existe des scalaires (forcément non nuls) λ_i et des chemins $c(\sigma_i)$ tels que $\sigma_i = \lambda_i \overline{c(\sigma)}$. Mais alors nous avons

$$\sigma_1 \cdots \sigma_n = \lambda_1 \cdots \lambda_n \overline{c(\sigma_1)} \cdots \overline{c(\sigma_n)} = 0.$$

Ainsi, le chemin $c(\sigma_1)c(\sigma_2)\cdots c(\sigma_n)$ se trouve dans I . L'algèbre A étant semi-commutative, nous avons $e_0Ae_n = 0$ et donc

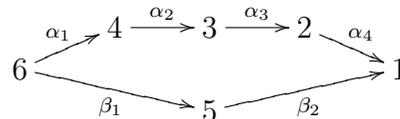
$$f(\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n) = 0.$$

□

Le théorème 5.2.11 donne des conditions suffisantes pour avoir un isomorphisme entre les groupes de cohomologie simpliciale et de Hochschild d'une algèbre $A = kQ/I$. Avant de voir quelques conséquences, remarquons que les conditions en question ne sont toutefois pas nécessaires, comme le montrent les exemples suivants

Exemples 5.2.12

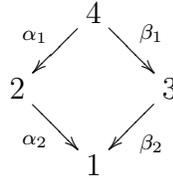
a) Soit Q le carquois



lié par l'idéal $I = \langle \alpha_1\alpha_2, \alpha_3\alpha_4 \rangle$. Cette algèbre est schurienne, mais pas semi-commutative. Cependant un calcul direct donne

$$\mathrm{SH}^i(A, k^+) \simeq \mathrm{HH}^i(A) \simeq \begin{cases} k & \text{si } i = 0, 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

b) L'algèbre héréditaire $A = kQ$ où Q est le carquois



n'est pas schurienne, mais elle est semi-commutative. Encore une fois, un calcul immédiat donne

$$\mathrm{SH}^i(A, k^+) \simeq \mathrm{HH}^i(A) \simeq \begin{cases} k & \text{si } i = 0, 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme il a été mentionné précédemment, les algèbres d'incidence des ensembles ordonnés sont schuriennes et semi-commutatives. Ainsi, le résultat suivant dû à Gerstenhaber et Schack est un cas particulier du théorème 5.2.11.

Corollaire 5.2.13 (Gerstenhaber-Schack [34]) *Soient (E, \leq) un ensemble ordonné, $\mathcal{B}E$ son complexe de chaînes, et $A = k(E)$ son algèbre d'incidence. Alors, pour tout $i \geq 0$, il existe un isomorphisme de groupes abéliens*

$$\mathrm{SH}^i(\mathcal{B}(E), k^+) \xrightarrow{\sim} \mathrm{HH}^i(A).$$

□

Ce résultat permet d'exploiter des outils classiques de topologie algébrique pour obtenir des résultats concernant la cohomologie de Hochschild des algèbres d'incidence. C'est ce que nous nous proposons de faire dans ce qui suit.

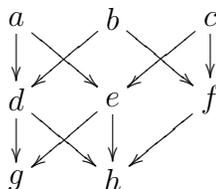
Corollaire 5.2.14 *Soit x un élément irréductible dans un ensemble ordonné (E, \leq) . Alors, pour tout $i \geq 0$, il existe des isomorphismes de groupes abéliens*

$$\mathrm{HH}^i(k(E)) \simeq \mathrm{HH}^i(k(E \setminus \{x\}))$$

Démonstration : Ceci suit du lemme précédent et de la proposition 2.3.6.

□

Exemple 5.2.15 Soit (E, \leq) l'ensemble ordonné dont le carquois est :



Soit $A = k(E)$ l'algèbre d'incidence correspondante. Nous avons vu à l'exemple 2.3.7 que l'espace $\mathcal{B}(E)$ est un espace topologique contractile. Ainsi, pour $i \geq 1$, nous avons :

$$\mathrm{HH}^i(A) \simeq \mathrm{H}^i(\mathcal{B}(E), k^+) = 0.$$

Dans [32], il a été prouvé que si (E, \leq) est un ensemble ordonné ayant un plus grand (ou un plus petit) élément, et $A = k(E)$ est l'algèbre d'incidence correspondante, alors les groupes de cohomologie de Hochschild $\mathrm{HH}^i(A)$ sont nuls pour $i \geq 1$. Ceci est un cas particulier du resultat suivant, prouvé dans [15].

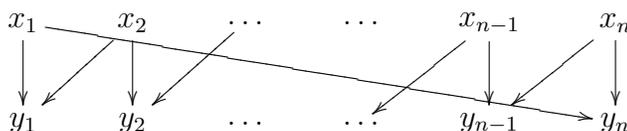
Proposition 5.2.16 Soit (E, \leq) un ensemble ordonné fini et $A = k(E)$ son algèbre d'incidence. S'il existe un élément $x_0 \in E$ tel que pour tout $y \in E$ on ait $x_0 \leq y$ ou $y \leq x_0$, alors :

$$\mathrm{HH}^i(A) = \begin{cases} k & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } i \geq 1. \end{cases}$$

Démonstration : En effet, nous avons vu à la proposition 3.2.10 que sous ces hypothèses l'espace $\mathcal{B}(E)$ est un cône, donc un espace topologique contractile. □

Comme il a été noté dans [26, 6, 32, 40], des ensembles ordonnés d'une forme particulière qu'il est habituel d'appeler **couronnes**, jouent un rôle crucial lorsqu'il est question de cohomologie de Hochschild et de connexité simple d'algèbres d'incidence.

Définition 5.2.17 Soit n un entier, $n \geq 2$. Une **couronne de largeur** n est un ensemble ordonné isomorphe à l'ensemble $\Gamma_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n\}$ ordonné par $y_i < x_i$, $y_{i-1} < x_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ avec la convention $y_0 = y_n$, et $x_i \not\leq x_j$, $y_i \not\leq y_j$ lorsque $i \neq j$.



Le résultat suivant, dû à Dräxler [26], montre les liens existant entre la connexité simple forte d'une algèbre d'incidence et le présence de couronnes dans l'ensemble ordonné considéré.

Corollaire 5.2.18 (Dräxler [26]) *Soit (E, \leq) un ensemble ordonné fini. Alors l'algèbre d'incidence $A = k(E)$ est fortement simplement connexe si et seulement si (E, \leq) ne contient pas de sous-ensemble ordonné convexe isomorphe à une couronne.*

Démonstration : Il est clair que si (E, \leq) contient un sous-ensemble ordonné convexe isomorphe à une couronne, alors l'algèbre d'incidence n'est pas fortement simplement connexe.

D'autre part, si (E, \leq) ne contient pas de sous-ensemble ordonné convexe isomorphe à une couronne, alors il en va de même pour tout sous ensemble ordonné convexe $(E' \leq)$ de (E, \leq) . Il suit alors du corollaire 3.8 dans [40] que le complexe $\mathcal{B}(E')$ est contractile, donc en particulier simplement connexe. Le résultat suit alors de 3.2.3. □

Remarque 5.2.19 Dans la démonstration précédente nous avons utilisé le fait que les complexes $\mathcal{B}(E')$ sont des espaces topologiques contractiles pour conclure qu'ils sont simplement connexes. Or, la contractibilité est une condition beaucoup plus forte que la connexité simple. En particulier, celle-ci entraîne que les groupes de cohomologie des complexes considérés sont nuls. Ceci montre l'énoncé suivant. Soit (E, \leq) un ensemble ordonné et $A = k(E)$ son algèbre d'incidence. Si A est fortement simplement connexe, alors, pour tout sous-ensemble ordonné convexe $(E' \leq)$ de (E, \leq) et tout $i \geq 1$ nous avons $\mathrm{HH}^i(k(E')) = 0$. Ceci est en fait un cas particulier du Théorème 1 de [31] (voir aussi 5.2.25).

Considérons maintenant des extensions ponctuelles d'algèbres d'incidence.

Soient (E_1, \leq) un ensemble ordonné et S un sous-ensemble de E_1 tel que pour tout $s \in S$, $y \leq s$ entraîne $y \in S$. Soit M_S le $k(E_1)$ -module défini par

$$M_S(x) = \begin{cases} k & \text{si } x \in S, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

et où toutes les applications $M_A(\alpha)$ entre deux espaces vectoriels non nuls sont l'identité sur k . Il suit de la construction de M_S que l'extension $k(E_1)[M_S]$ est aussi une algèbre d'incidence. L'ensemble ordonné concerné est l'ensemble $E = E_1 \cup \{s\}$ obtenu en rajoutant un nouvel élément maximal s qui couvre les éléments maximaux de S . Posons $E_2 = \{x \in E \mid x \leq s\} = S \cup \{s\}$. Avec ces notations, nous avons $E_1 \cap E_2 = S$. Considérons les algèbres d'incidence suivantes : $D = k(S)$, $B = k(E_1)$, $C = k(E_2)$, et $A = k(E)$. Nous avons ainsi $A = B[M_S]$. La suite de Mayer-Vietoris, jointe au théorème de Gerstenhaber

et Schack 5.2.13, fournit une suite exacte longue de groupes de cohomologie de Hochschild d'algèbres d'incidence.

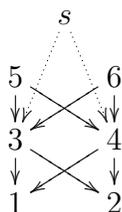
Proposition 5.2.20 *Avec les notations précédentes, il existe une suite exacte longue de k -espaces vectoriels de cohomologie de Hochschild d'algèbres d'incidence.*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{HH}^0(A) \rightarrow \mathrm{HH}^0(B) \oplus k \rightarrow \mathrm{HH}^0(D) \rightarrow \mathrm{HH}^1(A) \rightarrow \mathrm{HH}^1(B) \rightarrow \dots \\ \mathrm{HH}^i(B) \rightarrow \mathrm{HH}^i(D) \rightarrow \mathrm{HH}^{i+1}(A) \rightarrow \mathrm{HH}^{i+1}(B) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Démonstration : Nous avons $E = E_1 \cup E_2$, et $S = E_1 \cap E_2$. En particulier, ceci entraîne $\mathcal{B}(E) = \mathcal{B}(E_1) \cup \mathcal{B}(E_2)$. Ceci donne lieu à une suite exacte de Mayer-Vietoris faisant intervenir les groupes de cohomologie des espaces mentionnés ci haut, ainsi que ceux de $\mathcal{B}(S)$. Finalement, étant donné que E_2 possède un plus grand élément, à savoir s , le complexe $\mathcal{B}(E_2)$ est un espace topologique contractile, de sorte que tous ses groupes de cohomologie, sauf celui en degré 0, sont nuls. Le théorème 5.2.13 donne alors le résultat voulu. □

Remarque 5.2.21 On comparera ce résultat à la suite de Green-Marcos-Snashall dans [37], qui elle-même est une suite analogue à la suite de Happel (voir [38] ou 5.1.7). Notamment, en utilisant le lemme des cinq pour comparer la suite ci-haut à celle de [37], on obtient $\mathrm{HH}^i(D) = \mathrm{Ext}_B^i(M_S, M_S)$.

Exemple 5.2.22 Considérons l'ensemble ordonné obtenu en ajoutant l'élément s à l'ordonné E_1 , comme le montre la figure ci-dessous.



Soient $S = \{1,2,3,4\}$, $E_2 = S \cup \{s\}$, $B = k(E_1)$, $D = k(S)$, et $A = k(E)$ les algèbres d'incidence correspondantes, et $M = M_S$ le B -module dont le support est S . Ainsi, $A = B[M]$. L'espace classifiant $\mathcal{B}(E_1)$ est homéomorphe à la sphère S^2 . Ainsi, la suite du résultat précédent devient

$$0 \rightarrow k \rightarrow k \oplus k \rightarrow k \rightarrow \mathrm{HH}^1(A) \rightarrow 0 \rightarrow k \rightarrow \mathrm{HH}^2(A) \rightarrow k \rightarrow 0 \dots$$

ce qui mène à

$$\mathrm{HH}^i(A) = \begin{cases} k & \text{si } i = 0, \\ k^2 & \text{si } i = 2, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Étant donné un ensemble ordonné (E, \leq) , considérons l'ensemble ordonné \overline{E} obtenu en ajoutant deux éléments à E . Plus précisément, $\overline{E} = E \cup \{a, b\}$ où $a \leq x \leq b$ pour tout élément x de E . Soient $A = k(E)$ et $\overline{A} = k(\overline{E})$ les algèbres d'incidence respectives, et S_a, S_b les \overline{A} -modules simples correspondant aux éléments a et b , respectivement. Le résultat suivant, dû à Cibils [20] (voir aussi [40]) établit un lien entre les groupes de cohomologie de Hochschild de A et les groupes d'extensions de S_b par S_a dans $\mathrm{mod}\text{-}\overline{A}$.

Théorème 5.2.23 (Cibils [20]) *Avec les notations précédentes, il existe, pour $i \geq 1$ des isomorphismes de k -espaces vectoriels*

$$\mathrm{HH}^i(A) \simeq \mathrm{Ext}_{\overline{A}}^{i+2}(S_b, S_a)$$

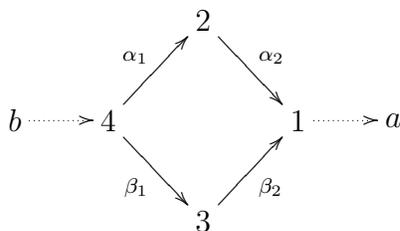
□

À la lumière du théorème 5.2.11, nous sommes portés à nous demander si un résultat analogue pourrait être établi pour les algèbres schuriennes semi-commutatives. Il faut tout d'abord préciser quelle serait la façon naturelle de rajouter des points dans ce contexte plus général. Dans le cas des algèbres d'incidence, l'ajout d'un plus grand élément b et d'un plus petit élément a équivaut à rajouter une nouvelle source b et un nouveau puits a au carquois de l'algèbre. En outre, il faut le faire de sorte à ce que l'on ait, pour tout autre sommet x du carquois, les égalités

$$\dim_k e_b \overline{A} e_x = \dim_k e_x \overline{A} e_a = 1.$$

Cette remarque suggère la façon dont les nouveaux sommets devraient être rajoutés au carquois d'une algèbre schurienne semi-commutative. Cependant, l'exemple suivant montre que pour les algèbres schuriennes semi-commutatives, cette construction ne donne pas lieu à un théorème analogue à 5.2.23.

Exemple 5.2.24 Soit \overline{Q} le carquois obtenu en ajoutant deux sommets a et b au carquois Q , comme le montre la figure ci-dessous :



Soit I l'idéal de kQ engendré par $\alpha_1\alpha_2$ et $\beta_1\beta_2$. Remarquons que I est aussi un idéal de $k\overline{Q}$. Posons $A = kQ/I$, et $\overline{A} = k\overline{Q}/I$. Nous avons alors une résolution projective du \overline{A} -module simple S_b donnée par :

$$0 \longrightarrow P_4 \longrightarrow P_b \longrightarrow S_b \longrightarrow 0$$

de sorte que $\text{dp}_{\overline{A}}S_b = 1$ et donc $\text{Ext}_{\overline{A}}^i(S_b, -) = 0$ pour tout $i \geq 2$. En particulier, $\text{Ext}_{\overline{A}}^3(S_b, S_a) = 0$. D'autre part, en vertu du théorème 5.2.11 et du corollaire 4.2.8, nous avons $\dim_k \text{HH}^1(A) = 1$.

Nous avons mentionné que les quotients des algèbres d'incidence sont des algèbres schuriennes semi-commutatives. Or, il se trouve que toute algèbre schurienne fortement simplement connexe est semi-commutative. Ceci nous mène au résultat suivant [31].

Théorème 5.2.25 (Gastaminza et al. [31]) *Soit $A = kQ/I$ une algèbre schurienne fortement simplement connexe. Alors, pour toute sous-catégorie pleine et convexe A' de A , et tout $i \geq 1$, nous avons $\text{HH}^i(A) = 0$.*

Démonstration : Il a été montré dans [2] que les groupes d'homologie simpliciale d'une algèbre schurienne fortement simplement connexe sont nuls. Par ailleurs, dans [26], il a été montré qu'une telle algèbre est le quotient d'une algèbre d'incidence, donc en particulier semi-commutative. Le résultat suit. □

Le résultat 5.2.11, jumelé au théorème 3.1.2, permet d'obtenir des preuves courtes et faciles de résultats bien connus concernant la cohomologie de Hochschild des algèbres monomiales.

Corollaire 5.2.26 (Happel [38]) *Soit $A = kQ/I$ une algèbre connexe, monomiale et semi-commutative. Alors*

- a) $\text{HH}^0(A) = k$.
- b) $\dim_k \text{HH}^1(A) = \chi(Q)$.
- c) $\text{HH}^i(A) = 0$ pour $i \geq 2$.

Démonstration : L'algèbre A étant monomiale, le graphe sous-jacent à Q est un retract de déformation de $\mathcal{B} = \mathcal{B}(Q, I)$. Par ailleurs, A étant schurienne et semi-commutative, nous avons, en vertu du théorème 5.2.11

$$\text{HH}^i(A) \simeq \text{SH}^i(\mathcal{B}, k^+) = \begin{cases} k & \text{si } i = 0, \\ k^{\chi(Q)} & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{si } i \geq 2. \end{cases}$$

□

Corollaire 5.2.27 (Bardzell - Marcos [9]) *Soit $A = kQ/I$ une algèbre avec I monomial. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- a) $\mathrm{HH}^i(A) = 0$ pour $i > 0$.
- b) $\mathrm{HH}^1(A) = 0$.
- c) Q est un arbre.

Démonstration :

Il est évident que a) entraîne b).

Afin de montrer que b) entraîne c), supposons que Q n'est pas un arbre, de sorte que $\chi(Q) > 0$. L'idéal I étant monomial, le graphe sous-jacent à Q est un retract de déformation de $\mathcal{B} = \mathcal{B}(Q, I)$. Ainsi,

$$\dim_k \mathrm{SH}^1(A, k^+) = \dim_k \mathrm{H}^1(\mathcal{B}, k^+) = \chi(Q) > 0$$

et le résultat suit.

Enfin, montrons que c) entraîne a). Si Q est un arbre, alors A est forcément schurienne et semi-commutative, de sorte que les hypothèses du théorème 5.2.11 sont vérifiées. Par ailleurs, le graphe sous-jacent à Q , qui, encore une fois est un retract de déformation de $\mathcal{B} = \mathcal{B}(Q, I)$, est un arbre, donc un espace topologique contractile. Ainsi, pour $i > 0$ nous avons :

$$\mathrm{HH}^i(A) \simeq \mathrm{SH}^i(A, k^+) \simeq \mathrm{H}^i(\mathcal{B}, k^+) = 0$$

□

5.3 Structure d'anneau sur $\mathrm{HH}^*(A)$

Tout comme $\mathrm{H}^*(\mathcal{B}, R) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{H}^i(\mathcal{B}, R)$ et, lorsque A possède une base semi-normée, $\mathrm{SH}^*(A, k) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{SH}^i(A, k)$ admettent une structure d'anneau gradué, nous verrons qu'il en va de même pour $\mathrm{HH}^*(A) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{HH}^i(A)$.

Cependant, il y a au moins deux façons naturelles de "multiplier" les éléments de $\mathrm{HH}^*(A)$: le produit de Yoneda des extensions; et un cup-produit évident, défini au niveau du complexe menant aux groupes de cohomologie $\mathrm{HH}^i(A)$.

Commençons par expliciter le premier. Étant donné un anneau R et deux R -modules M et N , les éléments de $\mathrm{Ext}_R^n(M, N)$ peuvent être interprétés en termes d'extensions de N par M . Soit $\mathcal{E}^n(M, N)$ la classe des extensions de N par M , c'est à dire la classe des suites exactes de R -modules de la forme

$$\xi : 0 \longrightarrow N \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow X_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Définissons la relation $\tilde{\sim}$ sur $\mathcal{E}^n(M,N)$ de la façon suivante: $\xi_1 \tilde{\sim} \xi_2$ s'il existe un diagramme commutatif de R -modules

$$\begin{array}{cccccccccccc} \xi_1 : & 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & X_{n-1} & \longrightarrow & X_{n-2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \parallel & & \\ \xi_2 : & 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & Y_{n-1} & \longrightarrow & Y_{n-2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Y_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

La relation $\tilde{\sim}$ n'est généralement pas une équivalence. Cependant, considérons la plus petite équivalence sur $\mathcal{E}^n(M,N)$ contenant $\tilde{\sim}$ que nous désignerons par \sim . Nous nous contenterons ici d'énoncer le théorème suivant. On pourra consulter [41, 18], par exemple, pour la démonstration.

Théorème 5.3.1 *Il existe une bijection $\text{Ext}_R^n(M,N) \longrightarrow \mathcal{E}^n(M,N)/\sim$*

□

Cette interprétation permet de définir le **produit de Yoneda** de deux extensions. Soient M, N , et L trois R -modules, Considérons deux extensions $\xi \in \text{Ext}_R^n(M,N)$, $\eta \in \text{Ext}_R^m(L,M)$ représentées par les suites :

$$\begin{array}{l} \xi : 0 \longrightarrow N \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow X_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_0 \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0 \\ \eta : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} Y_{m-1} \longrightarrow Y_{m-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_0 \longrightarrow L \longrightarrow 0 \end{array}$$

Soit $\xi\eta$ l'élément de $\text{Ext}_R^{n+m}(L,N)$ représenté par l'extension obtenue en "collant" ξ et η :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \xi\eta : & 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & X_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & Y_{m-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Y_0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & & & & \searrow & & \nearrow & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & p & & i & & & & & & & & & \end{array}$$

Il est aisé de voir que le produit de Yoneda des extensions est associatif. Cependant, cette représentation comporte le désavantage de rendre obscure l'interprétation de la structure additive des groupes d'extensions.

En nous servant du fait que $\text{HH}^i(A) = \text{Ext}_{A^e}^i(A,A)$, nous pouvons définir, en utilisant le produit de Yoneda, une opération sur

$$\text{HH}^*(A) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \text{HH}^i(A) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \text{Ext}_{A^e}^i(A,A)$$

Cette opération fait de $\mathrm{HH}^*(A)$ un anneau gradué par les entiers naturels.

D'autre part, comme dans [33], mais en utilisant plutôt la résolution projective de Cibils de ${}_A A_A$ donnée en 5.2.1, nous pouvons définir un cup-produit sur le complexe menant aux groupes de cohomologie de Hochschild de A . Rappelons que ces derniers sont les groupes de cohomologie du complexe

$$\cdots \xrightarrow{b^n} \mathrm{Hom}_{E^e}(\mathrm{rad}A^{\otimes n}, A) \xrightarrow{b^{n+1}} \mathrm{Hom}_{E^e}(\mathrm{rad}A^{\otimes(n+1)}, A) \xrightarrow{b^{n+2}} \cdots$$

La multiplication de A permet de définir un cup-produit sur le complexe ci-haut de façon naturelle : pour $f \in \mathrm{Hom}_{E^e}(\mathrm{rad}A^{\otimes p}, A)$ et $g \in \mathrm{Hom}_{E^e}(\mathrm{rad}A^{\otimes q}, A)$, soit $f \smile g$ l'élément de $\mathrm{Hom}_{E^e}(\mathrm{rad}A^{\otimes(p+q)}, A)$ défini par

$$(f \smile g)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_q) = f(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p)g(y_1 \otimes \cdots \otimes y_q)$$

Encore une fois, il est immédiat de vérifier que

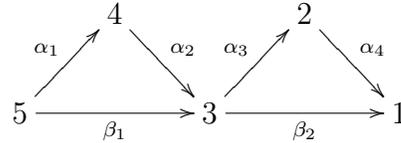
$$b^{p+q+1}(f \smile g) = b^p f \smile g + (-1)^p f \smile b^q g$$

En particulier, cette opération induit un produit, encore noté \smile , au niveau de la cohomologie. Celui-ci fait de $\mathrm{HH}^*(A)$ un anneau associatif, gradué par les entiers naturels, et anti-commutatif.

Il s'avère (voir [59], par exemple) que les deux produits que nous venons de voir sur $\mathrm{HH}^*(A)$ sont équivalents. Si le premier est bien adapté à des situations où les raisonnements sont purement homologiques - en utilisant, par exemple, les dimensions homologiques - le deuxième est mieux adapté à une comparaison avec l'homologie simpliciale de l'algèbre, ainsi que pour la construction d'exemples.

Exemples 5.3.2

a) Soit Q le carquois



et I l'idéal de kQ engendré par $\alpha_1\alpha_2$ et $\alpha_3\alpha_4$. Comme dans l'exemple 5.2.7, il est aisé de voir que les classes des morphismes $f_1, f_2 : \mathrm{rad}A^{\otimes 2} \rightarrow A$ définis par

$$f_1(x \otimes y) = \begin{cases} \beta_2 & \text{si } x \otimes y = \alpha_3 \otimes \alpha_4 \\ \alpha_2\beta_2 & \text{si } x \otimes y = \alpha_2\alpha_3 \otimes \alpha_4 \\ \beta_1\beta_2 & \text{si } x \otimes y = \beta_1\alpha_3 \otimes \alpha_4 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et

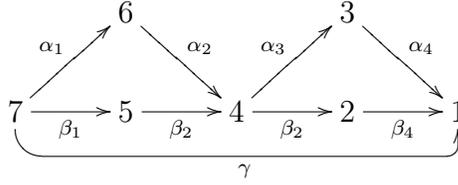
$$f_2(x \otimes y) = \begin{cases} \beta_1 & \text{si } x \otimes y = \alpha_1 \otimes \alpha_2 \\ \alpha_1 \alpha_3 & \text{si } x \otimes y = \beta_1 \otimes \alpha_2 \alpha_3 \\ \beta_1 \beta_2 & \text{si } x \otimes y = \alpha_1 \otimes \alpha_2 \beta_2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

sont les générateurs de $\text{HH}^2(A)$. Cependant, étant donné que $\text{HH}^4(A) = 0$, nous avons $\overline{f_1} \smile \overline{f_2} = 0$. En effet, il suffit de poser $g : \text{rad}A \rightarrow A$ défini par

$$g(x \otimes y \otimes z) = \begin{cases} \beta_1 \beta_2 & \text{si } x \otimes y \otimes z = \alpha_1 \otimes \alpha_2 \alpha_3 \otimes \alpha_4 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et de vérifier que $f_1 \smile f_2 = b^3(g)$. Remarquons cependant que $f_1 \smile f_2 \neq 0$.

b) Soit $A = kQ/I$, où Q est le carquois



et $I = \langle \alpha_1 \alpha_2, \alpha_2 \alpha_3, \alpha_3 \alpha_4, \beta_2 \beta_3, \alpha_2 \beta_3, \beta_2 \alpha_3 \rangle$. Dans ce cas nous avons

$$\text{HH}^i(A) = \begin{cases} k & \text{si } i = 0, 4, \\ k^2 & \text{si } i = 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme précédemment, les classes des morphismes $f_1, f_2 : \text{rad}A^{\otimes 2} \rightarrow A$ définis par

$$f_1(x \otimes y) = \begin{cases} \beta_1 \beta_2 & \text{si } x \otimes y = \alpha_1 \otimes \alpha_2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et

$$f_2(x \otimes y) = \begin{cases} \beta_3 \beta_4 & \text{si } x \otimes y = \alpha_3 \otimes \alpha_4 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

sont les générateurs de $\text{HH}^2(A)$. Par ailleurs, la classe de $g : \text{rad}A^{\otimes 4} \rightarrow A$ défini par

$$g(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \otimes x_4) = \begin{cases} \gamma & \text{si } x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \otimes x_4 = \alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \alpha_3 \otimes \alpha_4 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est le générateur de $\text{HH}^4(A)$. Cependant, étant donné que $f_1 \smile f_2 = 0$, nous avons $\overline{g} \neq \overline{f_1} \smile \overline{f_2}$. Ainsi, le produit de l'anneau de cohomologie $\text{HH}^*(A)$ est trivial.

Théorème 5.3.3 Soit $A = kQ/I$ une algèbre schurienne admettant une base semi-normée.

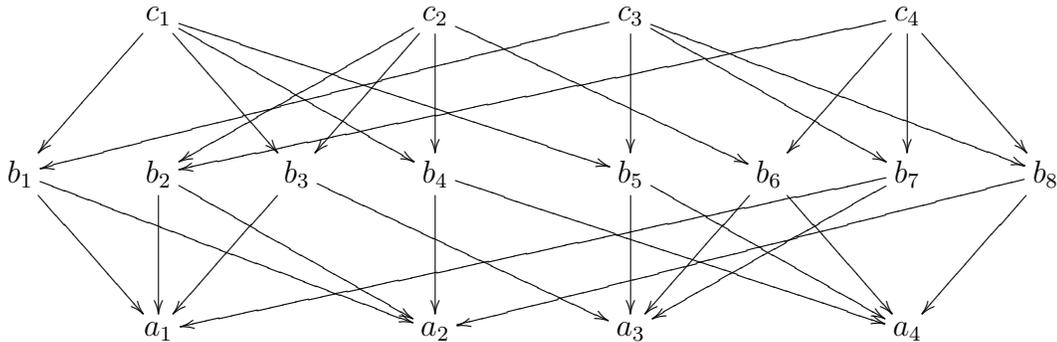
- a) Il existe un morphisme injectif d'anneaux gradués $\epsilon^* : \mathrm{SH}^*(A, k^+) \rightarrow \mathrm{HH}^*(A)$.
 b) Si en plus A est semi-commutative, nous avons un isomorphisme d'anneaux de cohomologie $\epsilon^* : \mathrm{SH}^*(A, k^+) \rightarrow \mathrm{HH}^*(A)$.

Démonstration : Montrons que le morphisme de complexes défini dans la section 5.2, à savoir $\epsilon_\bullet : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{SC}_\bullet(A), k^+) \rightarrow \mathrm{Hom}_{E^e}(\mathrm{rad} A^{\otimes \bullet}, A)$, préserve les cup-produits qui donnent les structures d'anneaux pour $\mathrm{SH}^*(A, k^+)$ et $\mathrm{HH}^*(A)$. Soient donc f et g des éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{SC}_n(A), k^+)$, et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{SC}_m(A), k^+)$, respectivement. Nous voulons montrer que $\epsilon_{n+m}(f \smile g) = \epsilon_n(f) \smile \epsilon_m(g)$. Soient $\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n$ et $\eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_m$ des éléments de $\mathrm{rad} A^{\otimes n}$ et $\mathrm{rad} A^{\otimes m}$, respectivement. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
 & \epsilon_{n+m}(f \smile g)(\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n \otimes \eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_m) \\
 &= (f \smile g)(\sigma_1, \dots, \sigma_n, \eta_1, \dots, \eta_m) \sigma_1 \cdots \sigma_n \eta_1 \cdots \eta_m \\
 &= f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) g(\eta_1, \dots, \eta_m) \sigma_1 \cdots \sigma_n \eta_1 \cdots \eta_m \\
 &= f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \sigma_1 \cdots \sigma_n g(\eta_1, \dots, \eta_m) \eta_1 \cdots \eta_m \\
 &= \epsilon_n(f)(\sigma_1 \cdots \sigma_n) \epsilon_m(g)(\eta_1, \dots, \eta_m) \\
 &= (\epsilon_n(f) \smile \epsilon_m(g))(\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n \otimes \eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_m)
 \end{aligned}$$

Le premier énoncé suit alors de 5.2.5, tandis que le deuxième suit du fait que sous ces hypothèses, le morphisme ϵ_\bullet est un isomorphisme de complexes (voir la démonstration de 5.2.11). □

Exemple 5.3.4 Soient T le tore, et $A = k(E_T)$ l'algèbre d'incidence correspondant à l'ensemble des cellules de T ordonnées par inclusion. Le carquois correspondant est



lié par toutes les relations de commutativité possibles. Afin d'alléger les notations, nous omettons les noms des points et des flèches. Nous avons vu à l'exemple 4.2.14 que \overline{w}_1^* et \overline{w}_2^* sont les générateurs de $\mathrm{SH}^1(A, k^+)$, et que leur produit est un générateur de $\mathrm{SH}^1(A, k^+)$. Ainsi, \overline{w}_1^* et \overline{w}_2^* sont les générateurs de $\mathrm{HH}^1(A)$, et que leur produit est un générateur de $\mathrm{HH}^1(A)$. Remarquons que, dans un contexte général, si $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ est un élément de la base de $\mathrm{SC}^1(A, k^+)$, nous avons que $\sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_n$ est un élément de $\mathrm{rad}A^{\otimes n}$, et alors l'élément $\epsilon_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n)^*$ est défini par :

$$\epsilon_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n)^*(\tau_1 \otimes \dots \otimes \tau_n) = \begin{cases} \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n & \text{si } \tau_1 \otimes \dots \otimes \tau_n = \sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette dernière remarque permet de calculer explicitement les générateurs de $\mathrm{HH}^i(A)$, pour $i = 1, 2$.

Conclusion

Le travail fait au sujet des groupes fondamentaux au chapitre 3 permet de donner une définition alternative du groupe fondamental d'un carquois lié (Q, I) . En effet, celui-ci peut être défini comme étant le premier groupe d'homotopie de l'espace classifiant $\mathcal{B}(Q, I)$. S'il est vrai qu'à toutes fins pratiques ceci ne comporte aucun avantage, une telle façon de procéder suggère la définition des groupes d'homotopie d'ordre supérieur d'un carquois lié, $\pi_n(Q, I)$, avec $n \geq 2$. En effet, il serait naturel de définir $\pi_n(Q, I)$ comme étant le $n^{\text{ième}}$ groupe d'homotopie de l'espace $\mathcal{B}(Q, I)$. Ceci permet, par transcription immédiate de résultats de topologie algébrique, d'obtenir des résultats et des outils de calcul pour ces groupes. L'importance et l'utilité du groupe $\pi_1(Q, I)$ étant bien établies en théorie des représentations des algèbres, il semble intéressant de s'attarder sur les groupes $\pi_n(Q, I)$, $n \geq 2$, afin de leur trouver une interprétation analogue à celle de $\pi_1(Q, I)$. Cependant, au delà de l'exercice de transcription immédiat, aucun résultat significatif n'a pu être obtenu. Notons qu'une autre approche pour la définition de ces groupes d'homotopie a été donnée dans [51]. Celle-ci mène à des groupes isomorphes aux $\pi_n(\mathcal{B}(Q, I))$.

Dans la même veine homotopique, nous avons montré que la construction de $\mathcal{B}(Q, I)$ se comporte bien par rapport aux revêtements de carquois liés. Ceux-ci induisent d'une part des foncteurs de rabaissement entre les catégories des représentations des carquois liés concernés; et d'autre part des revêtements d'espaces topologiques. Ces derniers sont des cas particuliers de fibrations. Il serait donc intéressant de généraliser la notion de revêtement et mettre au point une notion de fibration de carquois lié. Celle-ci pourrait mener, dans le meilleur des cas, à une généralisation des foncteurs de rabaissement. Notons cependant que ces problèmes semblent difficiles.

Par ailleurs, dans le volet (co)homologique, ce travail établit l'existence d'un monomorphisme de la cohomologie de $\mathcal{B}(Q, I)$ à coefficients dans k^+ vers la cohomologie de Hochschild de l'algèbre $A = kQ/I$ lorsque celle-ci est schurienne. Des conditions suffisantes pour que celui-ci soit un isomorphisme ont été établies. Il serait donc intéressant de trouver des conditions nécessaires, par exemple en déterminant le conoyau du morphisme en question, ce qui semble être un problème abordable.

Enfin, mentionnons que, outre des algèbres commutatives, des algèbres auto-injectives,

des algèbres d'incidence, ainsi que certaines extensions ponctuelles de celles-ci, rares sont les exemples connus d'algèbres dont l'anneau de cohomologie de Hochschild $\mathrm{HH}^*(A)$ a un produit non trivial. À la lumière du monomorphisme mentionné ci-haut, l'étude de l'anneau de cohomologie $H^*(\mathcal{B}(Q,I),k^+)$ semble être un bon point de départ pour l'étude de la structure d'anneau de $\mathrm{HH}^*(A)$. Remarquons que parmi les exemples cités, seules les algèbres d'incidence sont triangulaires. Finalement, cette observation, ainsi que le travail fait à la section 5.3 suggèrent la conjecture suivante :

Conjecture: *Soit $A = kQ/I$ une algèbre monomiale triangulaire. Alors, le produit de $\mathrm{HH}^*(A)$ est trivial.*

Bibliographie

- [1] I. Assem. *Algèbres et modules: cours et exercices*. Enseignement des mathématiques. Les Presses de l'Université d'Ottawa–Masson, Ottawa–Paris, 1997.
- [2] I. Assem, D. Castonguay, E. Marcos, et S. Trepode. Schurian strongly simply connected algebras. En préparation, 2003.
- [3] I. Assem, D. Castonguay, et C. Novoa. A long exact sequence of fundamental groups of triangular schurian algebras. En préparation, 2003.
- [4] I. Assem et J.A. de la Peña. The fundamental groups of a triangular algebra. *Comm. Algebra*, 24(1):187–208, 1996.
- [5] I. Assem et S. Liu. Strongly simply connected algebras. *J. Algebra*, 2(207):449–477, 1998.
- [6] I. Assem, M.I. Platzeck, M.J. Redondo, et S. Trepode. Simply connected incidence algebras. *Discrete Math.*, 269:333–355, 2003.
- [7] I. Assem, D. Simson, et A. Skowroński. *Elements of Representation Theory of Associative Algebras*. Toruń.
- [8] M. Auslander, I. Reiten, et O. Smalø. *Representation Theory of Artin Algebras*. Number 36 in Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [9] M. J. Bardzell et E. N. Marcos. $H^1(\Lambda)$ and presentations of finite dimensional algebras. Number 224 in Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, pages 31–38. Marcel Dekker, 2001.
- [10] R. Bautista, P. Gabriel, A. V. Roiter, et L. Salmerón. Representation-finite Algebras and Multiplicative Bases. *Invent. Math*, 81(2):217–285, 1985.
- [11] K. Bongartz. Zykellose algebren sind nicht zügellos. In *Rep. Theory II. Proc. Second International Conf. Carleton Univ.*, number 832 in Lecture notes in Mathematics, pages 97–102. Springer - Verlag, 1980.
- [12] K. Bongartz. A criterion for finite representation type. *Math. Ann.*, 269(1):1–12, 1984.

-
- [13] K. Bongartz et P. Gabriel. Covering spaces in representation theory. *Invent. Math.*, 65(3):331–378, 1981-1982.
- [14] O. Bretscher et P. Gabriel. The standard form of a representation-finite algebra. *Bull. Soc. Math. France*, 111:21–40, 1983.
- [15] J. C. Bustamante. On the fundamental group of a schurian algebra. *Comm. Algebra*, 30(11):5305–5327, 2002.
- [16] J. C. Bustamante. The classifying space of a bound quiver. Soumis pour publication dans *J. Algebra*, 2003.
- [17] J. C. Bustamante et D. Castonguay. $\pi_1(Q,I)$ and presentations of algebras. En préparation, 2003.
- [18] J. F. Carlson. *Modules and group algebras*. Birkhäuser - Verlag, Basel, 1996.
- [19] H. Cartan et S. Eilenberg. *Homological Algebra*. Number 19 in Princeton mathematical series. Princeton University Press, Princeton, 1956.
- [20] C. Cibils. Cohomology of incidence algebras and simplicial complexes. *J. Pure Appl. Algebra*, 56:221–232, 1989.
- [21] C. Cibils, E. Marcos, M.J. Redondo, et A. Solotar. Cohomology of split algebras and of trivial extensions. À paraître dans *Glasg. Math. J.*
- [22] F. Colin. Morphismes stricts de carquois liés et functorialité. Séminaire d'Algèbre, Université de Sherbrooke, automne 2002.
- [23] J. Constantin et G. Fournier. Ordonnés escamotables et points fixes. *Discrete mathematics*, 53:21–33, 1985.
- [24] J.A. de la Peña. On the abelian Galois covering of an algebra. *Journal of Algebra*, 102:129–134, 1986.
- [25] J.A. de la Peña et M. Saorín. The first Hochschild cohomology group of an algebra. *Manuscripta Math.*, 104:1–12, 2001.
- [26] P. Dräxler. Completely separating algebras. *J. Algebra*, 165:550–565, 1994.
- [27] P. Gabriel. Auslander-Reiten sequences and Representation-finite Algebras. In *Proc. ICRA II. (Ottawa 1979). Representations of Algebras*, number 831 in Lecture Notes in Mathematics, pages 1–71, Ottawa-Canada, 1980. Springer-Verlag.
- [28] P. Gabriel. The universal cover of a representation-finite algebra. In M. Auslander and E. Lluís, editors, *Representations of Algebras. Puebla 1980*, number 903 in Lecture Notes in Mathematics, pages 26–38, Puebla, México, 1980. Springer-Verlag.
- [29] P. Gabriel et Ch. Riedtmann. Group representations without groups. *Comment. Math. Helv.*, 54(2):240–287, 1979.
- [30] P. Gabriel et A. V. Roiter. *Representation of finite dimensional algebras*. Number 73 in Encyclopaedia Math. Sci. Algebra VIII. Springer, Berlin, 1992.
- [31] S. Gastaminza, J.A. de la Peña, M.I. Platzeck, M.J. Redondo, et S. Trepode. Algebras with vanishing Hochschild cohomology. *J. Algebra*, 212:1–16, 1999.

-
- [32] M.A. Gatica et M.J. Redondo. Hochschild cohomology and fundamental groups of incidence algebras. *Comm. Algebra*, 29(5):2269–2283, 2001.
- [33] M. Gerstenhaber. On the deformations of rings and algebras. *Ann. Math. Stud.*, (79):59–103, 1964.
- [34] M. Gerstenhaber et S.D. Schack. Simplicial cohomology is Hochschild cohomology. *J. Pure Appl. Algebra*, 30:143–156, 1983.
- [35] M. Gerstenhaber et S.D. Schack. Relative Hochschild cohomology, Rigid Algebras, and the Bockstein. *J. Pure Appl. Algebra*, 43:53–74, 1986.
- [36] E.L. Green. Graphs with relations, coverings and group-graded algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 279:279–310, 1983.
- [37] E.L. Green, E. N. Marcos, et N. Snashall. The Hochschild Cohomology Ring of a One Point Extension. *Univ. of Leicester. Technical Report*, (2001-03), 2001.
- [38] D. Happel. *Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras*, pages 108–126. Number 1404 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1989.
- [39] G. Hochschild. On the cohomology groups of an associative algebra. *Ann. of Math.*, 46:58–67, 1946.
- [40] K. Igusa et D. Zacharia. On the cohomology of incidence algebras of partially ordered sets. *Comm. Algebra*, 18(3):873–887, 1990.
- [41] S. MacLane. *Homology*. Classics in Mathematics. Springer, New-York, Berlin, Heidelberg, 1994.
- [42] Ma. I.R. Martins et J.A. de la Peña. Comparing the simplicial and the Hochschild cohomologies of a finite dimensional algebra. *J. Pure Appl. Algebra*, 138:45–58, 1999.
- [43] R. Martínez-Villa et J.A. de la Peña. The universal cover of a quiver with relations. *J. Pure Appl. Algebra*, 30:873–887, 1983.
- [44] R. Martínez-Villa et J.A. de la Peña. Multiplicative basis for algebras whose universal cover has no oriented cycles. *J. Algebra*, 87:389–395, 1984.
- [45] W. S. Massey. *Algebraic Topology: An Introduction*. Number 56 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1989.
- [46] S. Michelena et M.I. Platzeck. Hochschild cohomology of triangular matrix algebras. *J. Algebra*, 233(2):502–525, 2000.
- [47] J.R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley, 1994.
- [48] D. Quillen. *Higher Algebraic K-theory*, pages 85–147. Number 341 in Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1973.
- [49] M.J. Redondo. Hochschild cohomology: some methods for computations. *Resenhas IME-USP*, 5(2):113–197, 2001.
- [50] E. Reynaud. Algebraic fundamental group and simplicial complexes. *J. Pure Appl. Algebra*, 177(2):203–214, 2003.

-
- [51] E. Reynaud. Le $n^{\text{ième}}$ groupe fondamental algébrique. Preprint, 2003.
- [52] C. Riedtmann. Algebren Darstellungsköcher, Überlagerungen und zurück. *Comment. Math. Helv*, 55(2):199–224, 1980.
- [53] J. Rosenberg. *Algebraic K–theory and Its Applications*. Number 147 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1994.
- [54] J.J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Number 85 in Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 1979.
- [55] J.J. Rotman. *An Introduction to Algebraic Topology*. Number 119 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1988.
- [56] H. Schubert. *Topology*. Allyn and Bacon, Boston, 1968.
- [57] G. Segal. Classifying spaces and spectral sequences. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math*, (34):105–112, 1968.
- [58] A. Skowroński. Simply connected algebras et Hochschild cohomologies. In *Proceedings of the sixth international conference on representation of algebras*, number 14 in Ottawa-Carleton Math. Lecture Notes Ser., pages 431–448, Ottawa, ON, 1992.
- [59] M. Suárez-Alvarez. The Hilton - Eckmann argument for cup-products. [arXiv:math.KT/020929](https://arxiv.org/abs/math.KT/020929) v1, 2003.