**Lección n°01:** Matrices, ejemplos y operaciones 20 de octubre de 2018

# 1. Generalidades

- Notaremos los conjuntos de índices desde uno hasta $n, m \in \mathbb{N}$ por $I = \{1, 2, \cdots, n\}$ y $J = \{1, 2, \cdots, m\}$, respectivamente.
- Se entiende como cuerpo escalar $\mathbb{K}$ al conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) o los números complejos ($\mathbb{C}$).

# 2. Preliminares

**Definición 1 (Producto cartesiano)** *Dados dos conjuntos $A$ y $B$, el producto cartesiano de los conjuntos $A$ y $B$, notado $A \times B$, se define como el conjunto:*

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

**Ejemplo.**
Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{1, 2\}$. Todos los elementos del producto cartesiano de $A \times B$ son:

$$A \times B = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2)\}.$$

**Definición 2 (Función)** *Dados $A$ y $B$ dos conjuntos, $f$ es una **función de $A$ en $B$**, notada por $f : A \to B$, si:*

*1) $f \subseteq A \times B$;*

*2) para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$; y*

*3) si $(x, y) \in f$ y $(x, z) \in f$, entonces $y = z$.*

*En lugar de $(x, y) \in f$, escribiremos $f(x) = y$.*

# 3. Matriz

**Definición 3 (Matriz)** *Una matriz, sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, es una función definida por:*

$$\begin{aligned} A : I \times J &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (i, j) &\longmapsto A(i, j) \end{aligned}$$

Dado que $A$ es una función, para cada elemento de $I \times J$ existe un único escalar en $\mathbb{K}$. Para visualizar de mejor manera los elementos de la matriz $A$, se utiliza el siguiente arreglo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde:

- $i \in I$ representa la $i$-ésima fila de $A$,
- $j \in J$ representa la $j$-ésima columna de $A$,
- $a_{ij}$ representa $A(i, j)$
- La $i$-ésima fila de la matriz $A$, se nota por $A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$,
- La $j$-ésima columna de la matriz $A$, se nota por $A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, y
- $A$ es una matriz de orden $m \times n$ porque tiene $n$ filas y $m$ columnas.

**Observación.**

- Al conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ sobre el campo $\mathbb{K}$ se lo denota por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.
- Se utilizarán las primeras letras del alfabeto griego $(\alpha, \beta, \gamma)$ para referirnos a elementos de $\mathbb{K}$.
- Se utilizarán las primeras letras en mayúsculas $(A, B, C)$ para referirnos a elementos de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

**Definición 4** *Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$. Se dice que las matrices $A$ y $B$ son iguales si:*

*1) $m = p$;*

*2) $n = q$; y*

*3) $a_{ij} = b_{ij}$, para todo $i \in I$ y $j \in J$.*

## 3.1. Operaciones con matrices

**Definición 5** *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. La suma de las matrices $A$ y $B$, notada por $A+B$, es la matriz $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que:*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

*para todo $i \in I$ y $j \in J$.*

**Ejemplo.** Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

la suma de las matrices $A$ y $B$ es:

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 & 5 \\ -1 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

**Teorema 1** *Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se verifica que:*

*1) $A + B = B + A$; y*

*2) $A + (B + C) = (A + B) + C$.*

**Demostración.** Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Mostremos que $A + B = B + A$. Para ello, utilizando la representación matricial de $A$ y $B$, y considerando la propiedad conmutativa del campo escalar $\mathbb{K}$, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
A+B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2j}+b_{2j} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{ij}+b_{ij} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mj}+b_{mj} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} & \cdots & b_{1j}+a_{1j} & \cdots & b_{1n}+a_{1n} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} & \cdots & b_{2j}+a_{2j} & \cdots & b_{2n}+a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1}+a_{i1} & b_{i2}+a_{i2} & \cdots & b_{ij}+a_{ij} & \cdots & b_{in}+a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}+a_{m1} & b_{m2}+a_{m2} & \cdots & b_{mj}+a_{mj} & \cdots & b_{mn}+a_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\
&= B + A
\end{aligned}
$$

■

**Observación.** Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Notemos que, el utilizar la representación matricial de $A$ vuelve extensa a la demostración, sin que esto implique una mayor claridad de la misma. Por ello, cuando no existe confusión, nos referiremos a la matriz utilizando únicamente un elemento genérico, es decir, en lugar de escribir:

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
$$

escribiremos:

$$A = (a_{ij})$$

Utilizando esta última notación concluiremos la demostración del Teorema 1.

**Demostración.** Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $a, b \in \mathbb{K}$. Los siguientes enunciados se demuestran utilizando las propiedades del campo escalar $\mathbb{K}$ y la definición de igualdad de matrices.

Buscamos probar que $A+(B+C)=(A+B)+C$, lo cual se verifica, puesto que:

$$\begin{aligned} A+(B+C) &= (a_{ij})+(b_{ij}+c_{ij}) \\ &= (a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}) \\ &= (a_{ij}+b_{ij})+(c_{ij}) \\ &= (A+B)+C \end{aligned}$$

■

**Definición 6** *Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. La multiplicación del escalar $\alpha$ por la matriz $A$, notado por $\alpha A$, es la matriz $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que:*

$$c_{ij} = \alpha a_{ij}$$

*para todo $i \in I$ y $j \in J$.*

**Ejemplo.** Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \alpha = -2$$

el producto de la matriz $A$ por el escalar $\alpha$ es:

$$\alpha A = \begin{pmatrix} -6 & -8 & -14 & -18 \\ 2 & -6 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

**Teorema 2** *Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Se verifica que:*

*1) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;*

*2) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$; y*

*3) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$.*

**Demostración.** Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Los siguientes enunciados se demuestran utilizando las propiedades del campo escalar $\mathbb{K}$ y la definición de igualdad de matrices.

1) Buscamos probar que $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$, lo cual se verifica, puesto que:

$$\begin{aligned} \alpha(\beta A) &= \alpha(\beta a_{ij}) \\ &= \alpha\beta(a_{ij}) \\ &= (\alpha\beta)A \end{aligned}$$

2) Buscamos probar que $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$, lo cual se verifica, puesto que:

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta)A &= (\alpha+\beta)(a_{ij}) \\ &= ((\alpha+\beta)a_{ij}) \\ &= ((\alpha a_{ij}) + (\beta a_{ij}) \\ &= (\alpha(a_{ij}) + \beta(a_{ij}) \\ &= \alpha A + \beta A \end{aligned}$$

3) Buscamos probar que $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$, lo cual se verifica, puesto que:

$$\begin{aligned} a(A+B) &= \alpha(a_{ij}+b_{ij}) \\ &= (\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}) \\ &= (\alpha a_{ij}) + (\alpha b_{ij}) \\ &= \alpha(a_{ij}) + \alpha(b_{ij}) \\ &= \alpha A + \alpha B \end{aligned}$$

■

**Definición 7** *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. La multiplicación de las matrices $A$ y $B$, notada por $AB$, es la matriz $C \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ tal que:*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

*para todo $i \in I$ y $j \in J$.*

**Ejemplo.** Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

el producto de $A$ por $B$ está dado por:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 20 & 16 & 34 \\ -1 & 6 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Cada estrada de la matriz producto $AB$ se obtiene al multiplicar cada fila de $A$ por cada columna de $B$. Notemos asemás que no podemos calcular $BA$ puesto que las dimensiones de las matrices no lo permiten, es decir, que en general

$$AB \neq BA.$$

**Teorema 3** *Sean $A, D \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ y $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$. Se verifica que:*

*1) $A(\alpha B) = \alpha(AB)$;*

*2) $A(B+C) = AB + AC$;*

*3) $(A+D)B = AB + DB$;y*

*4) $A(BC) = (AB)C$.*

**Demostración.** Sean $A, D \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ y $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$. Se verifica que:

1) $A(\alpha B) = \alpha(AB)$;

$$\begin{aligned} A(\alpha B) &= (a_{ij})(\alpha b_{ij}) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ij}(\alpha b_{kj})\right) \\ &= \alpha\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ij}b_{kj}\right) \\ &= \alpha(AB) \end{aligned}$$

2) Notemos $E = B + C$ entonces $e_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$ para todo $i \in I$ y $j \in J$.

$$\begin{aligned}
A(B+C) &= AE \\
&= \left( \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_{kj} \right) \\
&= \left( \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (b_{kj} + c_{kj}) \right) \\
&= \left( \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} b_{kj} + a_{ik} c_{kj}) \right) \\
&= \left( \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} \right) \\
&= \left( \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right) + \left( \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} \right) \\
&= AB + AC
\end{aligned}$$

4) Notemos $F = BC$ entonces $f_{kj} = \sum_{l=1}^{p} b_{kl} c_{lj}$ para todo $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ y $j \in \{1, 2, \cdots, q\}$. Definimos también a la matriz $G = AB$ tal que $g_{il} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl}$ para todo $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ y $l \in \{1, 2, \cdots, p\}$.

$$\begin{aligned}
A(BC) &= AF \\
&= \left( \sum_{k=1}^{n} a_{ik} f_{kj} \right) \\
&= \left( \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left( \sum_{l=1}^{p} b_{kl} c_{lj} \right) \right) \\
&= \left( \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} a_{ik} b_{kl} c_{lj} \right) \\
&= \left( \sum_{l=1}^{p} \left( \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} \right) \\
&= \left( \sum_{l=1}^{p} g_{il} c_{lj} \right) \\
&= GC \\
&= (AB)C
\end{aligned}$$

■

**Definición 8** *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. La matriz transpuesta de $A$, notada por $A^\intercal$, es la matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ tal que:*

$$b_{ij} = a_{ji}$$

*es decir,*

$$A^\intercal = (a_{ij})^\intercal = a_{ji}$$

*para todo $i \in I$ y $j \in J$.*

**Ejemplo.** Sean

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

entonces

$$A^\intercal = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 0 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$$

**Teorema 4** *Sean $\alpha \in \mathbb{K}$, $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. Se verifica que:*

*1)* $(A^\intercal)^\intercal = A$*;*

*2)* $(A+B)^\intercal = A^\intercal + B^\intercal$*;*

*3)* $(\alpha A)^\intercal = \alpha A^\intercal$*; y*

*4)* $(AC)^\intercal = C^\intercal A^\intercal$.

**Demostración.**

1) Sea $F \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ tal que $F = A^\intercal$ donde $f_{ji} = a_{ij}$, y $G \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que $G = B^\intercal$ donde $g_{ij} = b_{ji}$.

$$\begin{aligned} (A^\intercal)^\intercal &= ((a_{ij})^\intercal)^\intercal \\ &= (a_{ji})^\intercal \\ &= (a_{ij}) \\ &= A \end{aligned}$$

2) Sea $F \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ tal que $F = A + B$ donde $f_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$$\begin{aligned} (A+B)^\intercal &= (a_{ij} + b_{ij})^\intercal \\ &= (f_{ij})^\intercal \\ &= (f_{ji}) \\ &= (a_{ji} + b_{ji}) \\ &= (a_{ji}) + (b_{ji}) \\ &= (a_{ij})^\intercal + (b_{ij})^\intercal \\ &= A^\intercal + B^\intercal \end{aligned}$$

3) $(\alpha A)^\intercal = \alpha A^\intercal$

$$\begin{aligned} (\alpha A)^\intercal &= (\alpha a_{ij})^\intercal \\ &= (\alpha a_{ji}) \\ &= \alpha(a_{ji}) \\ &= \alpha(a_{ij}^\intercal) \\ &= \alpha A^\intercal \end{aligned}$$

4) Notemos $F \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ tal que $F = AB$; $G \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$ tal que $G = C^\intercal$ donde $g_{ik} = c_{ki}$; y $H \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ tal que $H = A^\intercal$ donde $h_{kj} = a_{jk}$.

$$
\begin{aligned}
(AC)^\intercal &= F^\intercal \\
&= (f_{ij})^\intercal \\
&= (f_{ji}) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}c_{ki}\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} c_{ki}a_{jk}\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} g_{ik}h_{kj}\right) \\
&= GH \\
&= B^\intercal A^\intercal
\end{aligned}
$$

■

## 3.2. Tipos de matrices

- Vectores

  Un vector $x$ es una matriz $x \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ donde $n = 1$. El conjunto de vectores se nota por $\mathbb{K}^m$. Ejemplos de vectores son:

$$
x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad z = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}
$$

  Las últimas letras del alfabeto (x,y,z) se utilizarán para denotar vectores.

- Matriz cuadrada

  Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se dice que $A$ es una matriz cuadrada si $m = n$. El conjunto de matrices cuadradas se nota por $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ejemplos de matrices cuadradas son:

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & -7 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & -7 & 3 \\ 9 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}
$$

- Matriz nula

  Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se dice que $A$ es una matriz nula si $a_{ij} = 0$, $\forall i \in I$, $\forall j \in J$, es decir, si todas sus entradas son iguales a cero. Se nota $0_{m\times n}$ a las matriz nula de orden $m \times n$. Un ejemplo de matriz nula de orden $3 \times 4$ es:

$$
0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

- Matriz diagonal

  Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se dice que $A$ es una matriz diagonal si $a_{ij} = 0$ donde $i \neq j$, $\forall i, j \in J$. Ejemplos de matrices diagonales son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- Matriz identidad

  Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se dice que $A$ la matriz identidad si:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

  para todo $i, j \in I$. A la matriz identidad se la nota como $I_{n\times n}$ o $I_n$. Ejemplos de matrices identidad son:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matriz triangular superior

  Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se dice que $A$ es una matriz triangular superior si $a_{ij} = 0$, $\forall i > j$. Ejemplos de matrices triangulares superiores son:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- Matriz triangular inferior

  Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se dice que $A$ es una matriz triangular inferior si $a_{ij} = 0$, $\forall i < j$. Ejemplos de matrices triangulares inferiores son:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 8 & 7 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

- Matriz transpuesta

  Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, la matriz transpuesta de $A$, notada por $A^{\intercal} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$, se obtiene al intercambiar las filas por columnas de la matriz $A$, es decir, $(a_{ij})^{\intercal} = a_{ji}$, $\forall i \in I$ y $\forall j \in J$. Dadas las matrices:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 4 \\ 4 & 3 & 0 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 8 & 7 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

  sus respectivas matrices transpuestas son:

$$G^{\intercal} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^{\intercal} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 7 \\ 7 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B^{\intercal} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

- Matriz simétrica

  Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se dice que $A$ es una matriz simétrica si $A^\intercal = A$. Ejemplos de matrices simétricas son:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -8 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 5 & 7 \\ 8 & 5 & 4 & 1 \\ 9 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

- Matriz antisimétrica

  Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se dice que $A$ es una matriz simétrica si $-A^\intercal = A$. Ejemplos de matrices antisimétricas son:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Matriz nilpotente

  Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se dice que $A$ es nilpotente de orden $p \in \mathbb{N}$ si $A^p = 0_{n\times n}$. Un ejemplo de matriz nilpotente de orden dos es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

  puesto que:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Matriz idempotente

  Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se dice que $A$ es idempotente si $A^2 = 0_{n\times n}$. Un ejemplo de matriz idempotente es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  puesto que:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Matriz involutiva

  Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se dice que $A$ es involutiva si $A^2 = I_n$. Un ejemplo de matriz involutiva es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  puesto que:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matriz ortogonal

  Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, se dice que $A$ es ortogonal si $A^\intercal A = I_n$ y $AA^\intercal = I_m$. Un ejemplo de matriz ortogonal es:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

puesto que:

$$A^\mathsf{T} A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

y también $AA^\mathsf{T} = I_2$.

- Matriz conjugada

  Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, la matriz conjugada de $A$ se define como $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$. Por ejemplo, dada la matriz:

$$D = \begin{pmatrix} 2+i & -3 \\ 5+i & -7i \end{pmatrix}$$

  la matriz conjugada de $D$ es:

$$\overline{D} = \begin{pmatrix} 2-i & -3 \\ 5-i & 7i \end{pmatrix}$$

- Matriz hermítica

  Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, la matriz hermítica de $A$ se define como $A^\mathsf{H} = (\overline{A})^\mathsf{T}$. Por ejemplo, dada la matriz:

$$D = \begin{pmatrix} 2+i & -3 \\ 5+i & -7i \end{pmatrix}$$

  la matriz hermítica de $D$ es:

$$D^\mathsf{H} = \begin{pmatrix} 2-i & 5-i \\ -3 & 7i \end{pmatrix}$$

- Matriz hermitiana

  Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, se dice que $A$ es hermitiana si $A^\mathsf{H} = A$. Un ejemplo de matriz hermitiana es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5i \\ 5i & 0 \end{pmatrix}$$

  puesto que:

$$A^\mathsf{H} = (\overline{A})^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 5i \\ -5i & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -5i \\ 5i & 0 \end{pmatrix} = A$$

- Matriz unitaria

  Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, se dice que $A$ es unitaria si $A^\mathsf{H} A = I_n$. Un ejemplo de matriz unitaria es:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

  puesto que:

$$A^\mathsf{H} A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$